



Astr P.

Dziobek

43 m

DIE
MATHEMATISCHEN THEORIEN
DER
PLANETEN-BEWEGUNGEN

DARGESTELLT VON

DR. OTTO DZIOBEK

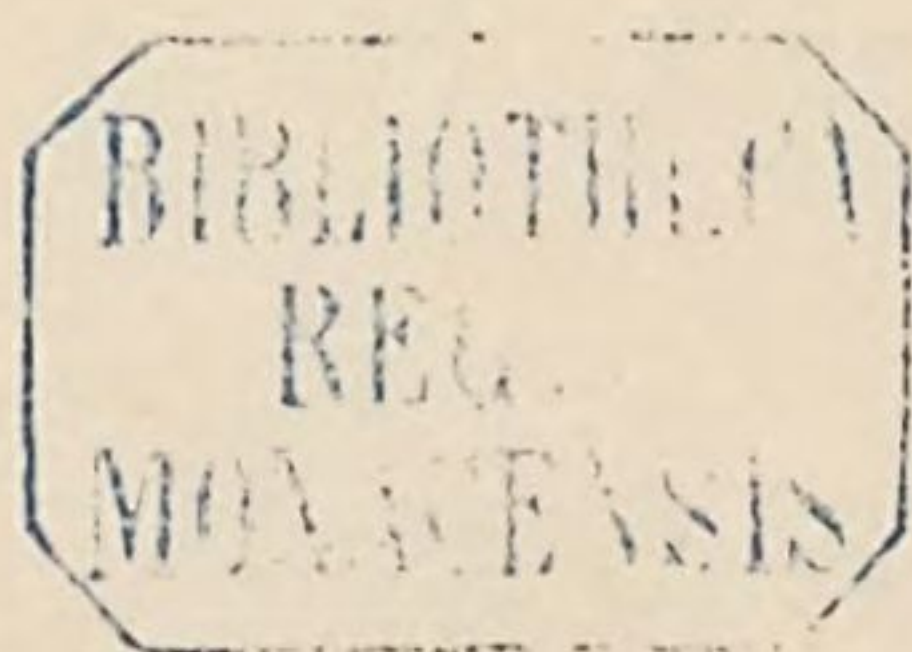
PRIVATDOCENT AN DER KÖNIGL. TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZU BERLIN-CHARLOTTENBURG.



LEIPZIG
JOHANN AMBROSIOUS BARTH
1888.

3375

26/8 88



THEORIEN
DER
PLANETEN-BEWEGUNGEN.

©
DIE
MATHEMATISCHEN THEORIEN
DER
PLANETEN-BEWEGUNGEN

DARGESTELLT VON

DR. OTTO DZIOBEK

PRIVATDOCENT AN DER KÖNIGL. TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZU BERLIN-CHARLOTTENBURG.

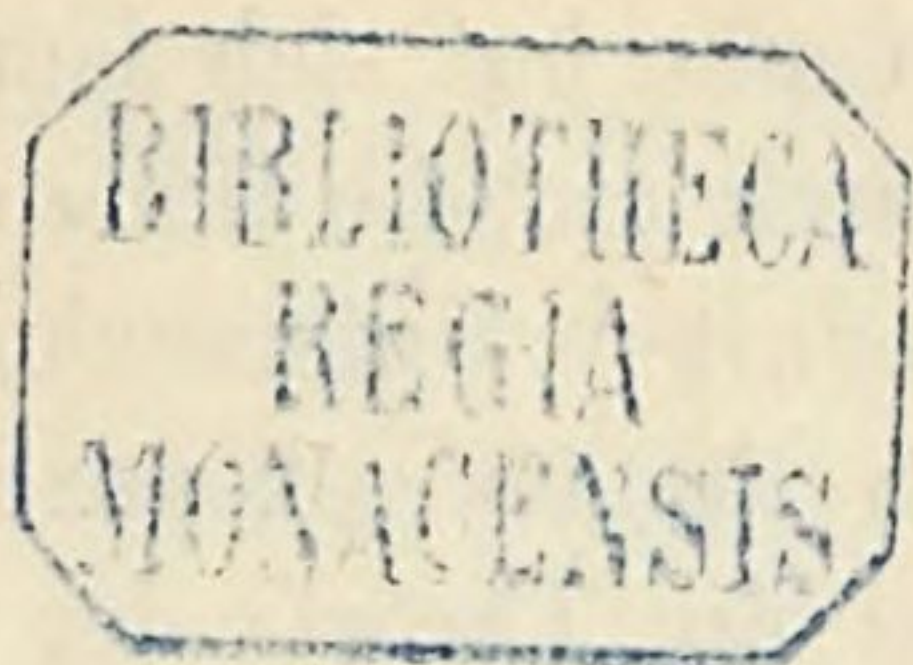


LEIPZIG
JOHANN AMBROSIOUS BARTH
1888.

Alle Rechte vorbehalten.



LEIPZIG. DRUCK VON GRIMME & TRÖMEL.



Vorrede.

Das Problem der Bewegung der Himmelskörper, an und für sich von hoher Bedeutung, wird es für den Mathematiker noch mehr durch den unvergleichlichen Scharfsinn, mit welchem die Koryphäen die Lösung angestrebt und in hohem Grade erreicht haben, sowie durch den Aufschwung, den seine Wissenschaft gerade diesem Problem verdankt. An ihm hat die analytische Mechanik, von NEWTON beginnend und durch LAGRANGE zur vollendeten Klarheit sich gestaltend, den für ihre Entwicklung nothwendigen Halt gefunden. Aber auch ausserdem verdankt die Mathematik der Astronomie eine so unerschöpfliche Fülle von Anregungen, dass unzweifelhaft ohne dieses auch heute noch nicht völlig gelöste Problem ihr Gang ein ganz anderer und wahrscheinlich langsamerer gewesen wäre.

Daher vereinigen sich alle Umstände, die Tiefe der mathematischen Betrachtungen, der gewaltige Einfluss auf die geschichtliche Entwicklung der Mathematik und endlich die Erhabenheit des Gegenstandes, um das Problem der Bewegung der Himmelskörper als das würdigste erscheinen zu lassen, wenn es gilt, die abstracten Theorien der heutigen analytischen Mechanik an einem Beispiel zu erläutern.

Seiner ganzen Anlage nach ist das hier vorliegende Werk nicht allein als Einleitung in das specielle Studium der Astronomie, sondern namentlich für den mathematisch durchgebildeten Studirenden bestimmt, welcher Einsicht in die eigenartigen Schöpfungen seiner Meister auf diesem Gebiet nehmen will. Das Fehlen eines kurz gefassten Lehrbuches, welches in einem einheitlichen Rahmen und in strenger Wissenschaftlichkeit die heute so ausserordentlich einfachen und durchsichtigen Principien der mathematischen Astronomie darstellt, ist sicher der Grund, dass so viele Mathematiker in ihren Kenntnissen von unserem Planetensystem kaum über die KEPLER'schen Gesetze

hinauskommen. Der Verfasser hat sich bemüht, diese Lücke auszufüllen und sein Buch dadurch auf die Höhe der heutigen Wissenschaft zu bringen, dass die neuesten Untersuchungen mit berücksichtigt und die jetzt schwebenden Fragen gekennzeichnet worden sind.

In diesem Werk wird die Theorie der Bewegung der Himmelskörper, dieselben als Massenpunkte betrachtet, behandelt, also derjenige Theil der Mechanik des Himmels, welcher von dem hervorragendsten Interesse ist und den übrigen, wie der Theorie der Rotation der Körper um ihren Schwerpunkt, der Theorie von Ebbe und Fluth, der Gestalt der Körper, zur Grundlage dient. Der Verfasser, welcher hofft, diese letzteren später in derselben Weise darstellen zu können, hat stets die einfachsten und schlichtesten Methoden, wie sie als das letzte Resultat der zu einem gewissen Abschluss gelangten Wissenschaft sich ergeben, bevorzugt und sich sorgfältig gehütet, geniale Intuitionen, wie sie hier so oft die Bahnbrecher gehabt, wie sie sich aber für die Darstellung in einem Lehrbuch nicht ziemen, wiederzugeben. Ein weiteres Vordringen ist überall durch Angabe der vom Verfasser fast ausnahmslos selbst durchgesehenen Quellenwerke erleichtert und der historische Gang der Entwicklung nach jedem hervorragenden Abschnitt in geeigneten Umrissen angegeben worden.

Am Schlusse befinden sich einige Tabellen, welche nach LEVERRIER und NEWCOMB für unser Planetensystem die numerischen Werthe derjenigen Grössen enthalten, die in der allgemeinen Theorie eingeführt worden sind.

Für die gewährte pekuniäre Unterstützung, durch welche ihm die Herausgabe dieses Werkes, so wie die dazu nothwendigen Studien ermöglicht wurden, bittet der Verfasser, hiermit Seiner Excellenz, dem Minister für geistliche, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten, Herrn Dr. v. GOSSLER seinen gehorsamsten und innigsten Dank abstaten zu dürfen.

Charlottenburg, den 1. September 1888.

Dr. Dziobek.

Inhalts-Verzeichniss.

ERSTER ABSCHNITT.

Lösung des Problems zweier Körper. Aufstellung der allgemeinen Integrale des Problems der n Körper. Algebraische Umformungen dieses Problems.

	Seite
§ 1. Das NEWTON'sche Gravitationsgesetz. Bewegung zweier Punkte nach demselben	1
§ 2. Die elliptische, die parabolische und die hyperbolische Bahn . . .	11
§ 3. Die geradlinige Bahn	20
§ 4. Auflösung der KEPLER'schen Gleichung. Entwicklung der Coordinaten als Functionen der Zeit	22
§ 5. Geschichtliche Uebersicht zu den §§ 1—4	36
§ 6. Das Problem der n Körper. Die allgemeinen Integrale desselben .	38
§ 7. Das Problem der drei Körper	51
§ 8. Specialfälle des Problems der drei Körper	66
§ 9. Geschichtliches über das Problem der drei Körper	80

ZWEITER ABSCHNITT.

Die allgemeinen Eigenschaften der Integrale.

§ 10. Die POISSON'sche Formel, die LAGRANGE'sche Formel	83
§ 11. Entwicklung der POISSON'schen und LAGRANGE'schen Formeln für die Elemente der elliptischen Bahn des Planeten um die Sonne .	97
§ 12. Das kanonische System von Integrationsconstanten	105
§ 13. Die kanonischen Constanten für die elliptische Bewegung eines Planeten um die Sonne	112
§ 14. Die Eigenschaften der Involutionssysteme	115
§ 15. Kanonische Umformungen des kanonischen Systems von Differentialgleichungen	123
§ 16. Die HAMILTON-JACOBI'sche partielle Differentialgleichung	127
§ 17. H enthält nicht die Zeit	131
§ 18. Die HAMILTON-JACOBI'sche partielle Differentialgleichung für die Bewegung des Planeten um die Sonne	139
§ 19. Geschichtlicher Ueberblick zum zweiten Abschnitt	146

DRITTER ABSCHNITT.

Die Theorie der Störungen.

	Seite
§ 20. Unser Sonnensystem betrachtet als System von n Punkten . . .	150
§ 21. Die Bahnen der Planeten um die Sonne. Die Theorie der absoluten Störungen	155
§ 22. Lösung der für die absoluten Störungen aufgestellten Differentialgleichungen	160
§ 23. Andere Formeln zur Berechnung der absoluten Störungen . . .	170
§ 24. Analytische Entwicklung der Störungsfuction	176
§ 25. Entwicklung von $(a_1^2 - 2a_1a_2 \cos \delta + a_2^2)^{-\frac{s}{2}}$ in eine trigonometrische Reihe	195
§ 26. Die Glieder 0ten, 1ten und 2ten Grades der Störungsfuction . .	200
§ 27. Die analytischen Ausdrücke der Störungen	206
§ 28. Die Variation der Elemente	213
§ 29. Ueber eine angenäherte Integration der Differentialgleichungen für die Variation der Elemente	218
§ 30. Die säcularen Werthe der Elemente. Entwicklung der exacten, zwischen ihnen stattfindenden Gleichungen	221
§ 31. Angenäherte Berechnung der säcularen Werthe der Elemente . .	224
§ 32. Die säcularen Variationen der mittleren Länge	236
§ 33. Die periodischen Glieder in den Elementen. Ueber eine Verbindung der Theorie der absoluten Störungen mit der Theorie der Variation der Elemente	239
§ 34. Die Stabilität unseres Planetensystems	243
§ 35. Der Einfluss der vernachlässigten säcularen Glieder der Störungsfuction, welche in Bezug auf Excentricitäten und Neigungen vom höheren Grade sind	244
§ 36. Die Glieder von langer Periode und die Commensurabilität zweier Umlaufszeiten	251
§ 37. Die Genauigkeit der Formeln für die Variation der Elemente . .	259
§ 38. Die Vervollständigung der Theorie der Variation der Constanten durch Berücksichtigung der von den zweiten Potenzen der Massen abhängenden Glieder	263
§ 39. Die Unveränderlichkeit der grossen Achsen	266
§ 40. Ueber die Form, in welcher die Elemente und die Coordinaten als Functionen der Zeit erscheinen	272
§ 41. Einige allgemeine auf die Coefficienten der Entwicklung der Coordinaten sich beziehende Formeln	277
§ 42. Kurze Geschichte der Störungstheorien	289
§ 43. Bemerkungen zu den Tabellen	299

Erster Abschnitt.

Lösung des Problems zweier Körper. Aufstellung der allgemeinen Integrale des Problems der n Körper. Algebraische Umformungen dieses Problems.

§ 1.

Das Newton'sche Gravitationsgesetz. Bewegung zweier Punkte nach demselben.

Das NEWTON'sche Gravitationsgesetz ist der Ausgangspunkt der mathematischen Untersuchungen der Bewegungen der Himmelskörper. Es lautet:

Zwei Massenpunkte ziehen sich gegenseitig an mit einer Kraft, welche direct proportional ihren Massen und umgekehrt proportional dem Quadrat ihrer Entfernung ist.

Um aus diesem Gesetz die stattfindenden Bewegungen abzuleiten, lege man ein im Raume ruhendes rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde.

Es seien zwei Punkte P_1 und P_2 gegeben, ferner seien x_1, y_1, z_1, m_1 die Coordinaten und die Masse von P_1 und x_2, y_2, z_2, m_2 die Coordinaten und die Masse von P_2 . Dann ist ihre Entfernung:

$$1) \quad r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

und wird dieselbe stets positiv gerechnet. Die zwischen ihnen wirkende Kraft ist dann nach obigem Gesetz:

$$= k^2 \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

wo k eine Constante bedeutet, deren Grösse von der Wahl der Masseneinheit, der Längeneinheit und der Zeiteinheit abhängt.

Da die beiden Punkte sich anziehen, so hat die Kraft, welche P_2 auf P_1 ausübt, die Richtung von P_1 nach P_2 und die Cosinus

der drei Winkel, welche diese Richtung mit den Richtungen der drei positiven Achsen (vom Anfangspunkt aus gezählt) bildet, sind daher:

$$\frac{x_2 - x_1}{r}, \quad \frac{y_2 - y_1}{r}, \quad \frac{z_2 - z_1}{r}.$$

Dieser Richtung ist die der von P_1 nach P_2 wirkenden gerade entgegengesetzt; die entsprechenden Cosinus der letzteren sind daher:

$$\frac{x_1 - x_2}{r}, \quad \frac{y_1 - y_2}{r}, \quad \frac{z_1 - z_2}{r}.$$

Die Componenten der ersten Kraft nach den drei Achsen ergeben sich somit als:

$$k^2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \frac{x_2 - x_1}{r^3}, \quad k^2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \frac{y_2 - y_1}{r^3}, \\ k^2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \frac{z_2 - z_1}{r^3}.$$

Die Componenten der zweiten Kraft sind ebenso:

$$k^2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \frac{x_1 - x_2}{r^3}, \quad k^2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \frac{y_1 - y_2}{r^3}, \\ k^2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \frac{z_1 - z_2}{r^3}.$$

Hieraus folgen die Differentialgleichungen der Bewegung der beiden Punkte, wenn man die Zeit mit t bezeichnet:

$$2) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k^2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \frac{x_2 - x_1}{r^3}, \\ m_1 \cdot \frac{d^2 y_1}{dt^2} = k^2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \frac{y_2 - y_1}{r^3}, \\ m_1 \cdot \frac{d^2 z_1}{dt^2} = k^2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \frac{z_2 - z_1}{r^3}, \\ \text{und ebenso:} \\ m_2 \cdot \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k^2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \frac{x_1 - x_2}{r^3}, \\ m_2 \cdot \frac{d^2 y_2}{dt^2} = k^2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \frac{y_1 - y_2}{r^3}, \\ m_2 \cdot \frac{d^2 z_2}{dt^2} = k^2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \frac{z_1 - z_2}{r^3}. \end{array} \right.$$

Es sind dieses 6 totale und simultane Differentialgleichungen und die Bestimmung der Bewegung der beiden Punkte ist daher wesentlich auf die Integration derselben zurückgeführt. Da sie sämtlich von der zweiten Ordnung sind, so führt ihre vollständige Integration zwölf

willkürliche Constante mit sich und dass diese Anzahl nothwendig ist, ergibt sich unmittelbar aus dem Umstande, dass man, um die Aufgabe zu einer genau bestimmten zu machen, zwölf Bedingungen stellen muss. Man kann als diese am einfachsten die Angabe der Coordinaten und der Geschwindigkeitscomponenten für einen gegebenen Moment annehmen.

Um die Integration der Gleichungen 2) vorzunehmen, addire man die erste und vierte. Man erhält:

$$m_1 \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \cdot \frac{d^2 x_2}{dt^2} = 0.$$

Hieraus durch Integration, wenn α eine Integrationsconstante bedeutet:

$$3) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} + m_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} = \alpha, \\ \text{und entsprechend:} \\ m_1 \cdot \frac{dy_1}{dt} + m_2 \cdot \frac{dy_2}{dt} = \beta, \\ m_1 \cdot \frac{dz_1}{dt} + m_2 \cdot \frac{dz_2}{dt} = \gamma, \end{array} \right.$$

Diese Gleichungen lassen sich sofort wieder integrieren und ergeben:

$$4) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 = \alpha t + \alpha_1, \\ m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 = \beta t + \beta_1, \\ m_1 \cdot z_1 + m_2 \cdot z_2 = \gamma t + \gamma_1. \end{array} \right.$$

Diese drei Gleichungen, in denen $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ Constante sind, lassen eine einfache Deutung zu. Bezeichnet man die Coordinaten des Schwerpunktes, also desjenigen Punktes, welcher ihre Entfernung im umgekehrten Verhältniss der Massen theilt, mit X, Y, Z , so ist:

$$5) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \\ Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}, \\ Z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}, \end{array} \right.$$

und die Gleichungen 4) ergeben:

$$6) \quad \left\{ \begin{array}{l} (m_1 + m_2) X = \alpha t + \alpha_1, \\ (m_1 + m_2) Y = \beta t + \beta_1, \\ (m_1 + m_2) Z = \gamma t + \gamma_1 \end{array} \right.$$

und beweisen mithin den Satz, welchen man den Satz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes zu nennen pflegt, nämlich:

Der Schwerpunkt bewegt sich auf einer geraden Linie mit constanter Geschwindigkeit.

Um die Integration der Gleichungen 2) zu vollenden, bemerke man, dass auf den rechten Seiten die Coordinaten nur in den Verbindungen

$$x_2 - x_1, \quad y_2 - y_1, \quad z_2 - z_1,$$

welche man die relativen Coordinaten des Punktes P_2 in Bezug auf P_1 nennt, vorkommen. Führt man daher ein dem ursprünglichen paralleles, bewegliches, beständig den Punkt P_1 als Anfangspunkt enthaltendes Coordinatensystem ein und bezeichnet die Coordinaten des zweiten Punktes in Bezug auf dieses System mit x, y, z , so sind:

$$7) \quad \begin{cases} x = x_2 - x_1, \\ y = y_2 - y_1, \\ z = z_2 - z_1. \end{cases}$$

Setzt man noch ausserdem:

$$8) \quad k^2 \cdot (m_1 + m_2) = \mu,$$

so erhält man, wenn man die drei ersten der Gleichungen 2) durch m_1 , die drei letzten durch m_2 dividirt und dann paarweise subtrahirt:

$$9) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\mu \cdot \frac{x}{r^3}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu \cdot \frac{y}{r^3}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -\mu \cdot \frac{z}{r^3}. \end{cases}$$

Diese drei Gleichungen führen durch ihre Integration die sechs übrigen Constanten mit sich und damit das Problem zu Ende, denn die Gleichungen 5) und 7) ergeben durch Auflösung nach $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$:

$$10) \quad \begin{cases} x_1 = X - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot x, & x_2 = X + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot x, \\ y_1 = Y - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot y, & y_2 = Y + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot y, \\ z_1 = Z - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot z, & z_2 = Z + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot z. \end{cases}$$

Im Hinblick auf die Anwendungen möge der Punkt P_1 die Sonne und P_2 der Planet heissen. Die Gleichungen 9) bestimmen dann die (relative) Bewegung des Planeten um die Sonne.

Um dieselben zu integrieren, multiplicire man die zweite mit $-z$ und die dritte mit $+y$ und addire. Man erhält:

$$y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} = 0.$$

Dieselbe ist sofort integrabel, und ergibt:

$$11) \quad \left\{ \begin{array}{l} y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = c_1. \\ \text{Die Analogen hierzu sind:} \\ z \cdot \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} = c_2, \\ x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c_3. \end{array} \right.$$

Es sind dies die sogenannten Flächenintegrale. Es ist nämlich $y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}$ der doppelte Inhalt des Dreiecks der yz Ebene, dessen Ecken der Anfangspunkt, die Projection des Punktes x, y, z und des benachbarten Punktes $x+dx, y+dy, z+dz$ sind. Und zwar ergibt sich derselbe als positiv oder negativ, je nachdem der unendlich kleine Winkel am Anfangspunkt vom Radiusvector in demselben oder im entgegengesetzten Sinne durchlaufen wird, in welchem die $+y$ nach der $+z$ Achse um $\frac{\pi}{2}$ gedreht werden kann. Nennt man also dieses Dreieck dS_1 , so ist:

$$dS_1 = \frac{c_1}{2} \cdot dt.$$

Entsprechendes gilt für die zx und die xy Ebene. Um das Coordinatensystem genauer zu bestimmen, wollen wir dasselbe ein für alle Mal so wählen, dass eine Drehung der $+x$ nach der $+z$ Achse, der $+z$ nach der $+x$ und der $+x$ nach der $+y$ Achse um einen rechten Winkel jedesmal im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers erfolgt, wenn dieselbe von derjenigen Seite der yz , resp. zx , resp. xy Ebene betrachtet wird, auf welcher die $+x$, resp. $+y$, resp. $+z$ Achse liegen. Dann ist also ein Sector positiv oder negativ, je nachdem er im entgegengesetzten Sinne oder im Sinne des Uhrzeigers durchlaufen wird.

Die Gleichungen 11) sagen dann aus, dass die Projectionen der von dem Radiusvector nach der Sonne durchlaufenen Flächenräume den Zeiten proportional sind. Für die Zeiteinheit sind diese Grössen $\frac{c_1}{2}$, $\frac{c_2}{2}$, $\frac{c_3}{2}$. Hieraus folgt, dass diese Flächenräume selbst ebenfalls den Zeiten proportional und dass für die Zeiteinheit diese Flächenräume $= \frac{c}{2}$ sind, wo c eine Abkürzung ist für:

$$12) \quad c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}.$$

Uebrigens pflegt man den Ausdruck $y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}$ mit dem Moment der Geschwindigkeit in Bezug auf die x Achse zu bezeichnen; ausser der oben angegebenen geometrischen Bedeutung hat es noch die andere, leicht aus jener fliessende, dass es gleich dem Product aus der Projection der Geschwindigkeit auf die yz Ebene mit dem vom Anfangspunkt auf dieselbe gefällten Lothe ist. Entsprechendes gilt für die analogen Ausdrücke. Die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate derselben ist gleich dem Moment der Geschwindigkeit in Bezug auf den Anfangspunkt, d. h. c ist gleich dem Producte aus der Geschwindigkeit und dem vom Anfangspunkte auf dieselbe gefällten Loth.

Aus 11) erhält man nach Multiplication mit x , y , z und Addition eine Finalgleichung zwischen den Coordinaten:

$$13) \quad c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0$$

und somit das Resultat:

Die Bahn des Planeten ist eben und wird in der Weise durchlaufen, dass die von dem Radiusvector nach der Sonne bestrichenen Flächenräume den Zeiten proportional sind.

Um weitere Integrationen vorzunehmen, ist es zweckmässig, eine nur r und t enthaltende Gleichung aufzustellen. Es ist:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\frac{r \cdot dr}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt}$$

und durch nochmalige Differentiation:

$$\frac{d\left(\frac{r \cdot dr}{dt}\right)}{dt} = x \frac{d^2x}{dt^2} + y \frac{d^2y}{dt^2} + z \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2},$$

oder nach 9), wenn man der Kürze wegen setzt:

$$14) \quad r \frac{dr}{dt} = r',$$

$$15) \quad \frac{dr'}{dt} = -\frac{\mu}{r} + \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}.$$

Differentiirt man noch einmal, so erhält man:

$$\frac{d^2 r'}{dt^2} = + \frac{\mu}{r^2} + 2 \frac{dx d^2 x + dy d^2 y + dz d^2 z}{dt^3},$$

oder nach 9):

$$16) \quad \frac{d^2 r'}{dt^2} = - \frac{\mu \cdot r'}{r^3},$$

Diese Gleichung stellt sich den Gleichungen 9) in einer bemerkenswerthen Weise an die Seite, insofern, als an Stelle von x, y, z der Buchstabe r' getreten ist. Combinirt man daher 16) mit 9) genau in derselben Weise, wie man die letzteren unter sich combinirt hat, um zu den Flächensätzen zu gelangen, so erhält man, wenn mit f_1, f_2, f_3 drei Integrationsconstanten bezeichnet werden:

$$17) \quad \begin{cases} x \frac{dr'}{dt} - r' \frac{dx}{dt} = f_1, \\ y \frac{dr'}{dt} - r' \frac{dy}{dt} = f_2, \\ z \frac{dr'}{dt} - r' \frac{dz}{dt} = f_3. \end{cases}$$

Multiplicirt man die Gleichungen 9) mit dx, dy, dz , so folgt durch Addition und Integration der Satz von der lebendigen Kraft:

$$18) \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{2a},$$

wo die Integrationsconstante aus bald hervortretenden Gründen mit $-\frac{\mu}{2a}$ bezeichnet wird:

Zwischen den Integralen 11), 17), 18) finden zwei identische Relationen statt. Zunächst ergibt sich aus 11) und 17) sofort:

$$19) \quad c_1 \cdot f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0.$$

Ferner ist nach einem bekannten Determinantensatz:

$$c^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} - \left(\frac{x dx + y dy + z dz}{dt} \right)^2,$$

oder nach 18):

$$20) \quad c^2 = r^2 \left(2 \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{a} \right) - r'^2.$$

Setzt man ferner:

$$21) \quad f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2},$$

so folgt aus 17) und 18):

$$f^2 = r^2 \cdot \left(\frac{dr'}{dt} \right)^2 + r'^2 \left(2 \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{a} \right) - 2r'^2 \frac{dr'}{dt},$$

oder da nach 15) und 18):

$$22) \quad \frac{dr'}{dt} = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{a},$$

$$23) \quad f^2 = r^2 \left(\frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{a} \right)^2 + r'^2 \frac{\mu}{a}.$$

Aus 20) und 23) folgt die zweite Relation zwischen den Integralen:

$$24) \quad c^2 \frac{\mu}{a} + f^2 = \mu^2.$$

Um schliesslich noch zu einer Endgleichung zwischen den Coordinaten zu gelangen, multiplicire man 17) der Reihe nach mit x, y, z und addire.

Man erhält mit Hilfe von 20) und 22):

$$25) \quad c^2 - \mu \cdot r = x \cdot f_1 + y f_2 + z f_3.$$

Diese Gleichung stellt eine Rotationsfläche zweiten Grades dar, welche von der Ebene 13), die wegen 19) durch die Achse dieser Fläche hindurchgeht, in einem Kegelschnitt geschnitten wird. Da ausserdem der Anfangspunkt, wie aus 25) hervorgeht, ein Brennpunkt der Fläche ist, so sieht man:

Die Bahn des Planeten um die Sonne ist ein Kegelschnitt, in dessen einem Brennpunkt die Sonne steht.

Naturgemäss kann man jetzt ein neues Coordinatensystem der ξ, η, ζ annehmen, indem als $\xi\eta$ Ebene die Bahnebene und als $+\xi$ Achse die Achse des Kegelschnittes, deren Richtungscosinus $= \frac{f_1}{f}$, $\frac{f_2}{f}$, $\frac{f_3}{f}$ sind, wählt. Die ζ Achse hat dann die Richtungscosinus: $\frac{c_1}{c}$, $\frac{c_2}{c}$, $\frac{c_3}{c}$, wenn man dieselbe so wählt, dass die Bewegung des Planeten im positiven Sinne erfolgt. Die Richtungscosinusse der η Achse ergeben sich aus den bekannten Relationen für die

Coordinatentransformationen gleich: $\frac{c_2 f_3 - c_3 f_2}{c \cdot f}$, $\frac{c_3 f_1 - c_1 f_3}{c \cdot f}$, $\frac{c_1 f_2 - c_2 f_1}{c \cdot f}$.

Die Transformationsformeln lauten also:

$$26) \quad \begin{cases} \xi = \frac{f_1}{f} \cdot x + \frac{f_2}{f} \cdot y + \frac{f_3}{f} \cdot z, \\ \eta = \frac{c_2 f_3 - c_3 f_2}{c \cdot f} \cdot x + \frac{c_3 f_1 - c_1 f_3}{c \cdot f} \cdot y + \frac{c_1 f_2 - c_2 f_1}{c \cdot f} \cdot z, \\ \zeta = \frac{c_1}{c} \cdot x + \frac{c_2}{c} \cdot y + \frac{c_3}{c} \cdot z. \end{cases}$$

Die Gleichungen der Bahn werden:

$$27) \quad \zeta = 0, \\ c^2 - \mu \cdot r = f \cdot \xi.$$

Ferner erhält man:

$$28) \quad \xi \cdot \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} = c.$$

Führt man noch Polarcoordinaten ein, indem man setzt:

$$29) \quad \begin{cases} \xi = r \cdot \cos v, \\ \eta = r \cdot \sin v. \end{cases}$$

so gehen 27) und 28) über in:

$$30) \quad r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \frac{f}{\mu} \cdot \cos v},$$

$$31) \quad \frac{r^2 \cdot dv}{dt} = c.$$

Ist p der Parameter eines Kegelschnittes und e die Excentricität, so lautet die Gleichung desselben für den Brennpunkt als Anfangspunkt, wenn man die $+$ Achse nach dem diesem Brennpunkt nächsten Scheitel richtet, in Polarcoordinaten:

$$32) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos v}.$$

Es ist also hier:

$$33) \quad p = \frac{c^2}{\mu},$$

$$34) \quad e = \frac{f}{\mu}.$$

Setzt man in 33) für μ seinen Werth 8) ein, so ergibt sich:

$$k = \frac{c}{\sqrt{p} \cdot \sqrt{m_1 + m_2}}.$$

c ist der doppelte Inhalt des in der Zeiteinheit vom Radiusvector beschriebenen Sectors. Nennt man daher S den in irgend einer Zeit T beschriebenen Sector, so ist $c = \frac{2S}{T}$ und daher

$$k = \frac{2S}{T \sqrt{p}} \sqrt{m_1 + m_2}, \quad \text{also:}$$

$$35) \quad k^2 = \frac{\left(\frac{2S}{T}\right)^2}{p \cdot (m_1 + m_2)}.$$

Also:*)

Für verschiedene, um die Sonne kreisende Planeten steht das Quadrat des Verhältnisses des durchlaufenen Flächenraumes zur Zeit im zusammengesetzten Verhältniss zum Parameter und zur Summe der Massen der Sonne und des Planeten.

Die Constante k nennt man die Gauss'sche Constante. Nimmt man die Masse der Sonne als Einheit, so ist diejenige der Erde $= \frac{1}{354710} = 0,0000028192$. Als Längeneinheit wählt man die grosse Achse der Erdbahn. Dann geht für ein siderisches Jahr der Sector in die ganze Ellipse über, also:

$$S = \pi ab = \pi \cdot a \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{b}} = \pi \cdot a \sqrt{a} \cdot \sqrt{p} = \pi \cdot \sqrt{p}.$$

T erhält man, wenn als Zeiteinheit ein mittlerer Sonnentag gewählt wird, gleich der Anzahl der Tage eines siderischen Jahres, also:

$$T = 365,2563835,$$

und hieraus ergibt sich:

$$k = 0,017209895.$$

Gauss hat übrigens den Vorschlag gemacht, die Masseneinheit so zu wählen, dass die Constante $k = 1$ wird. Dies ist offenbar der Fall, wenn man, unter Beibehaltung des Sonnentages als Zeiteinheit und der grossen Achse der Erdbahn als Längeneinheit, die Sonnenmasse nicht $= 1$, sondern $= (0,017209895)^2$ setzt. Dann kann man die Masseneinheit so definiren:

*) Siehe GAUSS' Werke (Theoria motus etc.) Bd. VII, S. 12.

Die Masseneinheit ist diejenige Masse, welche einem Körper in der Entfernung $= 1$ die Beschleunigung $= 1$ ertheilt. Denn in der That ergibt sich aus 2), wenn $k_2 = 1$ ist:

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x_2}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y_2}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z_2}{dt^2}\right)^2} = \frac{m_1}{r^2}.$$

Es folgt daraus, dass dann die Masseneinheit durch die Wahl der Längen- und Zeiteinheit bestimmt ist.

Die weitere Behandlung des Problems erfordert noch, r und v durch die Zeit t auszudrücken. Es folgt sofort aus 32) und 31) unter Berücksichtigung von 33):

$$36) \quad dt = \frac{p^{\frac{3}{2}} \cdot dv}{\sqrt{\mu} \cdot (1 + e \cos)^2}.$$

Bezeichnet man mit t_0 den Zeitpunkt, in welchem der Planet durch den der Sonne nächsten Scheitel, für welchen $v = 0$ ist, geht, so erhält man aus 36) durch Integration:

$$37) \quad t - t_0 = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \cdot \int_0^v \frac{dv}{(1 + e \cos v)^2}.$$

Dieses Integral muss verschieden behandelt werden, je nachdem $e \leq 1$ ist und wollen wir daher diese drei Fälle gesondert betrachten.

§ 2.

Die elliptische, die parabolische und die hyperbolische Bahn.

I. Fall $e < 1$.

Die Gleichung 32), § 1, stellt hier eine Ellipse dar. Bezeichnet man ihre grosse Achse mit $[a]$, so ist:

$$[a] = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 - \frac{f^2}{\mu^2}}, \text{ also nach 24), § 1:}$$

$$[a] = a,$$

d. h. die in 18), § 1, eingeführte Constante a ist positiv und gleich der grossen Achse der Ellipse. Diese Gleichung 18) sagt also aus, dass die Geschwindigkeit eines Planeten nur abhängt von der grossen Achse der Ellipse und seiner Entfernung von der Sonne.

Der Nenner des Integrals 37) wird dann nie $= 0$ und v nimmt daher mit t fortdauernd (wenn auch nicht gleichmässig) zu. Man kann es direct als trigonometrisches Integral auswerthen. Einfacher gelangt man aber zum Ziele, wenn man einen Hilfswinkel E einführt durch die Gleichung:

$$1) \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \cdot \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} E,$$

durch deren Differentiation man erhält:

$$2) \quad \frac{dv}{\cos^2 \frac{1}{2} v} \cdot \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \frac{dE}{\cos^2 \frac{1}{2} E} = dE (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} E),$$

mithin wächst E mit v fortwährend und wenn man für $v = 0$ auch $E = 0$ annimmt, so werden v und E für alle Vielfache von π zusammenfallen und sonst stets in demselben Halbkreis liegen.

Aus 1) folgt:

$$3) \quad \cos^2 \frac{1}{2} v = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} E \frac{1+e}{1-e}},$$

und daher geht 3) über in:

$$4) \quad dv = \sqrt{1-e^2} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} E}{1 - e + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} E (1+e)} \cdot dE = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 - e \cos E} \cdot dE.$$

Ferner ist:

$$5) \quad 1 + e \cos v = 1 - e + 2e \cos^2 \frac{v}{2} = \frac{1 - e^2}{1 - e \cos E},$$

mithin wird aus Gleichung 37), § 1:

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \frac{p^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu} \cdot (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^E dE (1 - e \cos E) \\ &= \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} (E - e \sin E). \end{aligned}$$

Setzt man also noch:

$$6) \quad \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} = \frac{1}{n},$$

$$7) \quad n \cdot (t - t_0) = M,$$

so erhält man:

$$8) \quad M = E - e \sin E.$$

Diese Gleichung nennt man die Kepler'sche Gleichung. Direct leistet sie nicht eigentlich das Gewünschte, nämlich die Dar-

stellung von E als Function von t . Um dies zu erreichen, muss man sie erst nach E auflösen, eine Aufgabe, welcher der § 4 gewidmet werden wird. Ist dies geschehen, so ergibt sich aus 1) v , aus 32) r , aus 29) ξ und η und schliesslich durch Umkehrung von 26) x, y, z . Diese Auflösung ergibt übrigens, da $\zeta = 0$ ist:

$$9) \quad \begin{cases} x = \xi \cdot \frac{f_1}{f} + \eta \cdot \frac{c_2 f_3 - c_3 f_2}{c \cdot f}, \\ y = \xi \cdot \frac{f_2}{f} + \eta \cdot \frac{c_3 f_1 - c_1 f_3}{c \cdot f}, \\ z = \xi \cdot \frac{f_3}{f} + \eta \cdot \frac{c_1 f_2 - c_2 f_1}{c \cdot f}. \end{cases}$$

Man kann diesen Gleichungen nach GAUSS' Vorgang eine zur Berechnung sehr bequeme Form geben. Führt man Polarcoordinaten ein, so ergibt sich:

$$x = r \left(\cos v \frac{f_1}{f} + \sin v \frac{c_2 f_3 - c_3 f_2}{c \cdot f} \right).$$

Setzt man also:

$$\frac{f_1}{f} = A_1 \cos B_1; \quad \frac{c_2 f_3 - c_3 f_2}{c f} = -A_1 \sin B_1,$$

so wird:

$$10) \quad \begin{cases} x = r \cdot A_1 \cdot \cos(v + B_1) \text{ und entsprechend:} \\ y = r \cdot A_2 \cdot \cos(v + B_2), \\ z = r \cdot A_3 \cdot \cos(v + B_3). \end{cases}$$

Die sechs Constanten A und B genügen übrigens den drei Gleichungen:

$$11) \quad \begin{cases} A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = 2, \\ A_1^2 \cdot \sin 2B_1 + A_2^2 \sin 2B_2 + A_3^2 \sin 2B_3 = 0, \\ A_1^2 \cos 2B_1 + A_2^2 \cos 2B_2 + A_3^2 \cos 2B_3 = 0, \end{cases}$$

wie daraus folgt, dass 10) die identische Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ergeben muss.

Den drei Winkeln v, M und E haben die Astronomen folgende Namen gegeben:

$$12) \quad \begin{cases} v = \text{wahre Anomalie,} \\ M = \text{mittlere Anomalie,} \\ E = \text{excentrische Anomalie.} \end{cases}$$

Zugleich heisst n die mittlere tägliche Bewegung.

also nach 6):

$$13) \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu}.$$

Wenn also, wie es in der That der Fall ist, m_2 gegen m_1 sehr klein ist und daher in erster Annäherung vernachlässigt werden kann, so ist die rechte Seite von 13) für alle Planeten dieselbe und wir sind somit zu den berühmten drei KEPLER'schen Gesetzen gelangt, welche lauten:

1. Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2. Die von den Radienvectoren nach der Sonne beschriebenen Flächenräume sind in gleichen Zeiten einander gleich.

3. Die Quadrate der Umlaufszeiten verschiedener Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der grossen Achsen.

Man kann den zwischen r, v, M, E, e, a bestehenden Relationen verschiedene Formen geben, welche je nach Umständen mehr oder weniger zweckmässig sind. Setzt man noch:

$$14) \quad e = \sin \varphi,$$

so sind die wichtigsten derselben, wie sie GAUSS in der Theoria motus (Werke, Bd. VII, S. 17) zusammengestellt hat, folgende:

$$15a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{I. } p = a \cos^2 \varphi, \\ \text{II. } r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \\ \text{III. } r = a(1 - e \cos E), \\ \text{IV. } \cos E = \frac{\cos v + e}{1 + e \cos v}, \quad \text{oder} \quad \cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \\ \text{V. } \sin \frac{1}{2} E = \sqrt{\frac{1 - \cos E}{2}} = \sin \frac{1}{2} v \cdot \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e \cos v}} \\ \quad = \sin \frac{1}{2} v \cdot \sqrt{\frac{r \cdot (1 - e)}{p}} = \sin \frac{1}{2} v \cdot \sqrt{\frac{r}{a(1 + e)}}, \\ \text{VI. } \cos \frac{1}{2} E = \sqrt{\frac{1 + \cos E}{2}} = \cos \frac{1}{2} v \cdot \sqrt{\frac{1 + e}{1 + e \cos v}} \\ \quad = \cos \frac{1}{2} v \cdot \sqrt{\frac{r(1 + e)}{p}} = \cos \frac{1}{2} v \cdot \sqrt{\frac{r}{a(1 - e)}}, \\ \text{VII. } \operatorname{tg} \frac{1}{2} E = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} \right), \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \text{VIII. } \sin E = \frac{r \cdot \sin v \cdot \cos \varphi}{p} = \frac{r \cdot \sin v}{a \cdot \cos \varphi}, \\
 & \text{IX. } r \cos v = a (\cos E - e) \\
 & \quad = 2a \cos(\tfrac{1}{2}E + \tfrac{1}{2}\varphi + 45^\circ) \cdot \cos(\tfrac{1}{2}E - \tfrac{1}{2}\varphi - 45^\circ), \\
 & \text{X. } \sin \tfrac{1}{2}(v - E) = \sin \tfrac{1}{2}\varphi \cdot \sin v \cdot \sqrt{\frac{r}{p}} \\
 & \quad = \sin \tfrac{1}{2}\varphi \cdot \sin E \cdot \sqrt{\frac{a}{r}}, \\
 & \text{XI. } \sin \tfrac{1}{2}(v + E) = \cos \tfrac{1}{2}\varphi \cdot \sin v \cdot \sqrt{\frac{r}{p}} \\
 & \quad = \cos \tfrac{1}{2}\varphi \cdot \sin E \cdot \sqrt{\frac{a}{r}}, \\
 & \text{XII. } M = E - e \sin E.
 \end{aligned}$$

Schliesslich wollen wir noch diejenigen Constanten zusammenstellen und erklären, welche die Astronomen speciell die sechs Elemente der Bahn zu nennen pflegen. Es sind diese:

- $$16) \left\{ \begin{aligned}
 & 1. \text{ Die grosse Achse} = a. \\
 & 2. \text{ Die Excentricität} = e. \\
 & 3. \text{ Die Länge des Knotens} = \Omega. \\
 & 4. \text{ Die Neigung der Bahnebene} = i. \\
 & 5. \text{ Die Länge des Perihels} = \pi. \\
 & 6. \text{ Die mittlere Länge des Planeten für die gewählte Epoche} = \epsilon.
 \end{aligned} \right.$$

a und e haben die frühere Bedeutung. Von jetzt an wollen wir stets die xy Ebene so gewählt voraussetzen, dass $c_1 = \frac{xdy - ydx}{dt}$ positiv ist. Sie theilt die Bahnebene in zwei Theile, von denen der auf der Seite der $+z$ Achse der obere und der andere der untere genannt wird. Den Punkt, in welchem der Planet aus dem unteren in den oberen Theil tritt, nennt man aufsteigenden Knoten, den entgegengesetzten den absteigenden Knoten.

Ω , die Länge des Knotens, ist dann derjenige Winkel, welchen der nach dem aufsteigenden Knoten gehende Radiusvector mit der $+x$ Achse bildet und i , die Neigung der Bahnebene, ist der spitze Winkel, welchen sie mit der xy Ebene bildet.

Die Gleichung der Bahnebene wird dann:

$$x \sin \Omega \sin i - y \cos \Omega \sin i + z \cos i = 0.$$

*1. mée. cel.
p. 515.*

Vergleicht man dies mit 19) und 33), § 1, so erhält man:

$$17) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_1 = \sqrt{\mu \cdot a (1 - e^2)} \cdot \sin \Omega \cdot \sin i \\ c_2 = - \sqrt{\mu \cdot a (1 - e^2)} \cdot \cos \Omega \sin i \\ c_3 = \sqrt{\mu \cdot a (1 - e^2)} \cos i \end{array} \right\} c = \sqrt{\mu \cdot a (1 - e^2)}.$$

Die Wurzel ist hier positiv zu nehmen, da c_3 positiv und i spitz ist. Wenn $i = 0$ ist, so kann der Winkel Ω beliebig angenommen werden. Ferner sei $\pi - \Omega$ der Winkel, den das Perihelium mit dem aufsteigenden Knoten bildet, so dass π , also die Länge des Perihels, in der Weise gemessen wird, dass man zu dem in der xy Ebene befindlichen Winkel Ω den in der Bahnebene befindlichen $\pi - \Omega$ addirt. Diese Bezeichnungsweise erscheint zuerst sonderbar, empfiehlt sich aber, wenn der Winkel i sehr klein ist. Wenn $i = 0$, so geht π in den Winkel über, welchen das Perihelium mit der x Achse bildet.

Mit Anwendung der sphärischen Trigonometrie ergibt sich:

$$18) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1 = \mu \cdot e [\cos \pi + \sin \Omega \cdot \sin (\pi - \Omega) (1 - \cos i)], \\ f_2 = \mu \cdot e [\sin \pi - \cos \Omega \sin (\pi - \Omega) (1 - \cos i)], \\ f_3 = \mu \cdot e \sin (\pi - \Omega) \cdot \sin i. \end{array} \right.$$

Die Formeln 9) nehmen daher die Gestalt an:

$$19) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \xi [\cos \pi + \sin \Omega \sin (\pi - \Omega) (1 - \cos i)] \\ \quad + \eta [-\sin \pi + \sin \Omega \cos (\pi - \Omega) (1 - \cos i)], \\ y = \xi [\sin \pi - \cos \Omega \cdot \sin (\pi - \Omega) (1 - \cos i)] \\ \quad + \eta [\cos \pi - \cos \Omega \cos (\pi - \Omega) (1 - \cos i)], \\ z = \xi \cdot \sin (\pi - \Omega) \cdot \sin i + \eta \cdot \cos (\pi - \Omega) \cdot \sin i. \end{array} \right.$$

Die mittlere Anomalie hängt mit der Zeit durch die Gleichung zusammen:

$$M = n \cdot t - n t_0.$$

Statt t_0 wollen wir eine neue Constante ε einführen durch die Gleichung:

$$20) \quad -n \cdot t_0 = \varepsilon - \pi,$$

so dass:

$$21) \quad M = nt + \varepsilon - \pi.$$

Für $nt + \varepsilon$ wollen wir noch den Namen mittlere Länge (von der $+x$ Achse aus gerechnet) und die Bezeichnung wählen:

$$22) \quad \zeta = nt + \varepsilon.$$

Handwritten note:
 $\zeta = nt + \varepsilon$
 (allgemein)

Alle angeführten Formeln vereinfachen sich wesentlich, wenn $e = 0$, wenn also die Bahn des Planeten kreisförmig ist und gleichförmig durchlaufen wird. Lässt man dann noch die xy Ebene mit der Bahnebene zusammenfallen, so werden Ω und π willkürlich. Dagegen wird $nt + \varepsilon = \zeta$ derjenige Winkel, den der Planet mit der $+x$ Achse bildet.

Führt man in 19) noch die Polarcoordinaten 29), § 1, ein, so folgt:

$$23) \quad \begin{cases} x = r [\cos(v + \pi) + \sin(v + \pi - \Omega) \cdot \sin \Omega (1 - \cos i)], \\ y = r [\sin(v + \pi) - \sin(v + \pi - \Omega) \cdot \cos \Omega (1 - \cos i)], \\ z = r \sin(v + \pi - \Omega) \cdot \sin i, \end{cases}$$

welche Formeln für die numerische Rechnung sehr bequem sind.

II. Fall $e = 1$.

In diesem Falle ist die Bahn eine Parabel. a wird unendlich und M und $E = 0$, verlieren also ihre Bedeutung. Doch lässt sich jetzt das Integral 37), § 1, sehr leicht ausführen durch die Substitution:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = z.$$

Es wird dann:

$$\int_0^v \frac{dv}{(1 + \cos v)^2} = \frac{1}{2} \int_0^z dz (1 + z^2) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{z^3}{3} \right),$$

und hieraus ergibt sich:

$$24) \quad \frac{2(t - t_0) \cdot \sqrt{\mu}}{p^{\frac{3}{2}}} = (\operatorname{tg} \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2} v).$$

Diese Gleichung hat man nach v aufzulösen und dann ganz ebenso zu verfahren, wie bei der Ellipse. Für $t = -\infty$ ergibt sich $v = -\pi$, $r = +\infty$, für $t = +\infty$ ergibt sich $v = +\pi$, $r = +\infty$, so dass der Planet, da $\frac{1}{a} = 0$ ist, nach 19), § 1, mit unendlich kleiner Geschwindigkeit aus der Unendlichkeit gekommen ist, im Perihelium seine grösste Geschwindigkeit erreicht und dann mit bis zur 0 abnehmenden Geschwindigkeit in die Unendlichkeit verschwindet.

III. Fall $e > 1$.

Gleichung 32), § 1, stellt eine Hyperbel vor. Da r positiv ist, so muss $1 + e \cos v > 0$, also $\cos v > -\frac{1}{e}$ sein. Setzt man also

$\cos \psi = \frac{1}{e}$, so muss v sich zwischen den Grenzen $-180^\circ + \psi$ und $180^\circ - \psi$ erstrecken. Für diese beiden Grenzwerte wird $r = \infty$. Lässt man v über $180^\circ - \psi$ wachsen, so ergibt 32), § 1, negative Werte für r und man kommt auf den anderen Hyperbelzweig, welcher die Sonne nicht einschliesst. Dieser spielt für den hier vorliegenden Fall keine Rolle, da der Planet beständig auf dem ersten bleibt.

Nennt man die grosse Achse der Hyperbel $[a]$, so folgt:

$$[a] = \frac{p}{e^2 - 1},$$

also nach 33), 34) und 24), § 1:

$$[a] = -a,$$

d. h. die eingeführte Constante a ist für die Hyperbel negativ und ihr absoluter Werth ist gleich der grossen Achse. M und E werden hier imaginär, für eine reelle Lösung also illusorisch. Doch kann man einen anderen Hilfwinkel F einführen durch die Gleichung:

$$25) \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} F = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} v,$$

und man erhält aus 37), § 1:

$$26) \quad \frac{(t - t_0) \cdot \sqrt{\mu}}{(-a)^{\frac{3}{2}}} = e \operatorname{tg} F - \ln [\operatorname{tg} (\frac{1}{2} F + 45^\circ)],$$

also, wenn man sich der Bezeichnung bedient:

$$27) \quad u = [\operatorname{tg} (\frac{1}{2} F + 45^\circ)],$$

$$28) \quad \frac{(t - t_0) \cdot \sqrt{\mu}}{(-a)^{\frac{3}{2}}} = \frac{e}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right) - \ln u.$$

Ist aus 28) u bestimmt, so ergeben 27) und 25) F und v . Aus 18), § 1, folgt, dass der Planet mit der Geschwindigkeit $\sqrt{\frac{\mu}{-a}}$ aus der Unendlichkeit gekommen ist, mit bis zum Perihelium beständig zunehmender Geschwindigkeit die Sonne umkreist und dann mit bis zu $\sqrt{\frac{\mu}{-a}}$ wieder abnehmender Geschwindigkeit sich in die Unendlichkeit entfernt.

Fall I findet für alle Planeten statt, welche um unsere Sonne kreisen. Die beiden anderen finden nur bei den Kometen ihre An-

wendung, welche theils in langgestreckten Ellipsen, theils in Parabeln, theils in sehr langgestreckten Hyberbeln die Himmelsräume durchziehen.

§ 3.

Die geradlinige Bahn.

Ausser den im vorigen Paragraphen angeführten Fällen kann es noch einen letzten geben, nämlich den, dass $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Dann lassen sich die Gleichungen 11) des § 1 sofort noch einmal integrieren und man erhält, wenn p_1, p_2, p_3 drei Constanten sind:

$$1) \quad \frac{x}{p_1} = \frac{y}{p_2} = \frac{z}{p_3},$$

also die Gleichungen einer durch die Sonne gehenden geraden Linie. Nimmt man diese als x Achse, so sind y und $z = 0$, also:

$$r = \pm x.$$

Man kann es so einrichten, dass der Planet zu einem bestimmten Zeitpunkt auf der positiven Seite sich befindet. Dann muss er, um auf die negative Seite zu gelangen, durch die Sonne hindurch. In dem Moment indessen, in welchem er auf die Sonne stürzt, wird die Kraft unendlich gross und die Principien der Differentialrechnung verlieren ihre Bedeutung. Von diesem Moment hört also die Betrachtung auf und man kann darum stets setzen:

$$r = + x.$$

Die Differentialgleichung der Bewegung wird:

$$2) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{\mu}{x^2}.$$

Diese lässt sich sofort integrieren, indem man sie mit dx multiplicirt und ergiebt:

$$3) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{\mu}{x} - \frac{\mu}{2a},$$

wo $-\frac{\mu}{2a}$ wieder die Integrationsconstante ist.

Wir wollen zunächst annehmen, dass für einen Zeitpunkt $t = t_0$, für welchen $x = x_0$, die Geschwindigkeit, also $\frac{dx}{dt}$ negativ sei. Der Planet nähert sich also der Sonne und es wird aus 3):

$$dt = - \frac{dx}{\sqrt{2\mu} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2a} \right)}}.$$

Bezeichnet man schliesslich mit t_1 die Zeit, in welcher der Planet den Ort x_1 erreicht, so erhält man durch Umkehrung der Grenzen des Integrals:

$$3a) \quad t_1 - t_0 = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \cdot \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{2a}}}.$$

Ist nun: 1) a positiv, so muss $x \leq 2a$ sein, und setzt man dann:

$$\frac{x}{2a - x} = z^2, \quad x = \frac{2az^2}{1 + z^2},$$

so wird:

$$t_1 - t_0 = \frac{4a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \cdot \int_{z_1}^{z_0} \frac{z^2 dz}{(1 + z^2)^2} = \frac{4a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \cdot \left[\frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} z - \frac{z}{2(1 + z^2)} \right]_{z_1}^{z_0},$$

also endlich:

$$t_1 - t_0 = \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{x}{2a - x}} - \frac{\sqrt{x(2a - x)}}{2a} \right]_{x_1}^{x_0}.$$

Setzt man $x_0 = 2a$, $x_1 = 0$, lässt also den Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit 0 von der Entfernung $2a$ in die Sonne stürzen, so erhält man die dazu nöthige Zeit:

$$4) \quad T = \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \cdot \operatorname{arc} (\operatorname{tg} = \infty) = \frac{a^{\frac{3}{2}} \cdot \pi}{\sqrt{\mu}},$$

also nach 13), § 2, T halb so gross wie die Umlaufszeit eines sich in einer Ellipse mit der Achse a bewegenden Planeten.

Ist ferner 2) $a = \infty$, so ergibt sich sofort:

$$5) \quad t_1 - t_0 = \frac{2}{3\sqrt{2\mu}} (x_0^{\frac{3}{2}} - x_1^{\frac{3}{2}}).$$

Ist endlich 3) a negativ, so setze man:

$$\frac{x}{2a - x} = -z^2,$$

es wird dann:

$$t_1 - t_0 = \frac{4(-a)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \cdot \int_{z_1}^{z_0} \frac{z^2 dz}{(1 - z^2)^2} = \frac{4(-a)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \cdot \left[\frac{1}{4} \ln \frac{1 - z}{1 + z} + \frac{z}{2(1 - z^2)} \right]_{z_1}^{z_0},$$

also:

$$6) \quad t_1 - t_0 = \frac{2(-a)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \cdot \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{x-2a} - \sqrt{x}}{\sqrt{x-2a} + \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x(x-2a)}}{2a} \right]_{x_1}^{x_0}$$

Wenn die Anfangsgeschwindigkeit von der Sonne hinweggerichtet ist, so unterscheide man wieder die drei Fälle:

1) a positiv.

Dann wird diese Geschwindigkeit $= 0$, wenn $x = 2a$ und der Planet kehrt an diesem Punkte um und zur Sonne zurück.

2) $a = \infty$,

so wird die Geschwindigkeit erst $= 0$, wenn $r = \infty$, d. h. der Punkt entfernt sich mit bis zur 0 abnehmender Geschwindigkeit in die Unendlichkeit.

3) a negativ,

so bleibt die Geschwindigkeit positiv und nimmt bis zu $\sqrt{\frac{\mu}{-a}}$ ab, mit welcher der Planet sich in die Unendlichkeit entfernt.

Aus diesen Betrachtungen folgt, dass auch im Falle, dass die Bahn gerade ist, dieselbe betrachtet werden kann als eine unendlich flache Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem $\frac{1}{a} \gtrless 0$.

Von den Fallzeiten für die geradlinige Bewegung wird in § 18 eine sehr merkwürdige Anwendung auf den allgemeinen Fall gemacht werden.

§ 4.

Auflösung der Kepler'schen Gleichung. Entwicklung der Coordinaten als Functionen der Zeit.

Um die Coordinaten als Functionen der Zeit zu entwickeln, bedarf es vor allen Dingen der Auflösung der KEPLER'schen Gleichung:

$$1) \quad M = E - e \sin E$$

in Bezug auf E . Man hat zahlreiche Methoden erdacht, um diese berühmte Gleichung, wenn M und e wirklich gegeben sind, numerisch aufzulösen und ist unter diesen die einfachste die von GAUSS (Theoria motus S. 20) angegebene. Für die späteren Anwendungen liegt uns indessen vor allen Dingen an einer allgemeinen Lösung, zu welcher zwei verschiedene Wege führen, der eine durch die sogenannte LAGRANGE'sche Reihe hindurch, welche von ihm wahrscheinlich erst bei dem Studium der KEPLER'schen Gleichung entdeckt wurde, der andere durch die BESSEL'schen Functionen.

Die LAGRANGE'sche Reihe beschäftigt sich mit der Entwicklung von x nach steigenden Potenzen von e , wenn zwischen beiden eine Gleichung von der Form: $y = x - e \cdot \varphi(x)$

$$2) \quad x = y + e \varphi(x)$$

gegeben ist, wo $\varphi(x)$ eine beliebig gegebene Function von x bedeutet. Diese Entwicklung lautet:

$$3) \quad x = y + \frac{e}{1} \cdot \varphi(y) + \frac{e^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\partial(\varphi)^2}{\partial y} + \frac{e^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\partial^2[\varphi(y)]^3}{\partial y^2} \\ + \frac{e^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{\partial^3[\varphi(y)]^4}{\partial y^3} + \dots$$

Man kann diese Entwicklung noch verallgemeinern, indem man statt x irgend eine Function $f(x)$ nach steigenden Potenzen von e entwickelt. Man erhält:

$$4) \quad f(x) = f(y) + \frac{e}{1} \cdot \varphi(y) \cdot f'(y) + \frac{e^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\partial[\varphi(y)^2 \cdot f'(y)]}{\partial y} \\ + \frac{e^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\partial^2[(\varphi(y))^3 f'(y)]}{\partial^2 y} + \dots$$

Ueber die Convergenz dieser Reihe, mit deren Ableitung wir uns hier nicht beschäftigen wollen, haben verschiedene Mathematiker Untersuchungen angestellt und ist das Endresultat z. B. in SERRET, höhere Algebra, Theil I, S. 368 (deutsche Uebersetzung) wie folgt angegeben:

Die Gleichung $x = y + e \varphi(x)$ hat, wenn e und y gegeben sind, mehrere Wurzeln, die im allgemeinen verschieden sind. Ist e_1 der kleinste Werth, für welchen bei gegebenem y zwei dieser Wurzeln gleich sind, so ist die Reihe von LAGRANGE convergent, so lange der absolute Werth (Modul) von e kleiner ist als derjenige von e_1 und zwar liefert dieselbe diejenige Wurzel, welche den kleinsten Modul hat.

Für das KEPLER'sche Problem hat man zu setzen:

$$x = E, \quad y = M, \quad \varphi(x) = \sin x$$

und erhält daher:

$$5) \quad E = M + \frac{e}{1} \sin M + \frac{e^2}{2!} \cdot \frac{\partial \sin^2 M}{\partial M} + \frac{e^3}{3!} \cdot \frac{\partial^2 \sin^3 M}{\partial^2 M} \\ + \frac{e^4}{4!} \cdot \frac{\partial^3 \sin^4 M}{\partial^3 M}.$$

Um die Differentiationen auszuführen, ist es zweckmässig, die Potenzen von $\sin M$ nach $\sin$ und $\cos$ der Vielfachen von M zu entwickeln. Man erhält dann bis auf die 6^{ten} Potenzen von e genau:

$$\begin{aligned}
 6) \quad E &= M + e \sin M + \frac{e^2}{2!2} \cdot \sin 2M \\
 &+ \frac{e^3}{3!2^2} (3^2 \sin 3M - 3 \sin M) \\
 &+ \frac{e^4}{4!2^3} (4^3 \sin 4M - 4 \cdot 2^3 \sin 2M) \\
 &+ \frac{e^5}{5!2^4} (5^4 \cdot \sin 5M - 5 \cdot 3^4 \sin 3M + 10 \sin M) \\
 &+ \frac{e^6}{6!2^5} (6^5 \sin 6M - 6 \cdot 4^5 \sin 4M + 15 \cdot 2^5 \sin 2M).
 \end{aligned}$$

Um r zu erhalten, benutze man die Formel $r = a(1 - e \cos E)$, setzt man also in 4) $f(x) = \cos x$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 7) \quad \frac{r}{a} &= 1 - e \cos M + \frac{e^2}{2} (1 - \cos 2M) \\
 &- \frac{e^3}{2!2^2} (3 \cos 3M - 3 \cos M) \\
 &- \frac{e^4}{3!2^3} (4^2 \cos 4M - 4 \cdot 2^2 \cos 2M) \\
 &- \frac{e^5}{4!2^4} \cdot (5^3 \cos 5M - 5 \cdot 3^3 \cos 3M + 10 \cos M) \\
 &- \frac{e^6}{5!2^5} \cdot (6^4 \cos 6M - 6 \cdot 4^4 \cos 4M + 15 \cdot 2^4 \cos 2M).
 \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich sofort, da $\xi = \frac{a(1 - e^2) - r}{e}$:

$$\begin{aligned}
 8) \quad \frac{\xi}{a} &= \cos M - \frac{e}{2} (3 - \cos 2M) + \frac{e^2}{2!2^2} (3 \cos 3M - 3 \cos M) \\
 &+ \frac{e^3}{3!2^3} \cdot (4^2 \cos 4M - 4 \cdot 2^2 \cos 2M) \\
 &+ \frac{e^4}{4!2^4} \cdot (5^3 \cos 5M - 5 \cdot 3^3 \cos 3M + 10 \cos M) \\
 &+ \frac{e^5}{5!2^5} \cdot (6^4 \cos 6M - 6 \cdot 4^4 \cos 4M + 15 \cdot 2^4 \cos 2M) \\
 &+ \frac{e^6}{6!2^6} (7^5 \cos 7M - 7 \cdot 5^5 \cos 5M + 21 \cdot 3^5 \cos 3M - 35 \cos M).
 \end{aligned}$$

Ferner folgt aus $\eta = a \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \sin E = a \cdot \sqrt{1 - e^2} \frac{E - M}{e}$:

$$\begin{aligned}
 9) \quad \frac{\eta}{a \cdot \sqrt{1-e^2}} = & \sin M + \frac{e}{2!2} \cdot 2 \cdot \sin 2M + \frac{e^2}{3!2^2} (3^2 \sin 3M - 3 \sin M) \\
 & + \frac{e^3}{4!2^3} (4^3 \sin 4M - 4 \cdot 2^3 \sin 2M) \\
 & + \frac{e^4}{5!2^4} (5^4 \sin 5M - 5 \cdot 3^4 \sin 3M + 10 \sin M) \\
 & + \frac{e^5}{6!2^5} (6^5 \cdot \sin 6M - 6 \cdot 4^5 \sin 4M + 15 \cdot 2^5 \cdot \sin 2M) \\
 & + \frac{e^6}{7!2^6} (7^6 \cdot \sin 7M - 7 \cdot 5^6 \sin 5M + 21 \cdot 3^6 \cdot \sin 3M - 35 \sin M).
 \end{aligned}$$

Um η selbst nach steigenden Potenzen von e zu entwickeln, muss man die Reihe 9) mit der Reihe für $\sqrt{1-e^2}$:

$$\sqrt{1-e^2} = (1-e^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{8} \cdot e^4 - \frac{1}{16} \cdot e^6$$

multipliciren und man erhält:

$$\begin{aligned}
 10) \quad \frac{\eta}{a} = & \sin M + \frac{e}{2!2} \cdot 2 \sin 2M + \frac{e^2}{3!2^2} (3^2 \sin 3M - 15 \sin M) \\
 & + \frac{e^3}{4!2^3} (4^3 \sin 4M - (4 \cdot 2^3 + 3 \cdot 4 \cdot 2^2) \sin 2M) \\
 & + \frac{e^4}{5!2^4} \cdot [5^4 \cdot \sin 5M - (5 \cdot 3^4 + 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3^2) \sin 3M \\
 & \quad + (10 + 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 - 5!2) \sin M] \\
 & + \frac{e^5}{6!2^5} [6^5 \sin 6M - (6 \cdot 4^5 + 5 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 4^3) \sin 4M \\
 & \quad + (15 \cdot 2^5 + 5 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2^3 - 6!2) \sin 2M] \\
 & + \frac{e^6}{7!2^6} [7^5 \cdot \sin 7M - (7 \cdot 5^6 + 6 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5^4) \sin 5M \\
 & \quad + (21 \cdot 3^6 + 6 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3^4 - 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3^2) \sin 3M \\
 & \quad - (35 + 6 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 10 - 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 + 7!2^2) \sin M].
 \end{aligned}$$

Etwas schwieriger gestaltet sich die Berechnung von v , also die Entwicklung der sogenannten Mittelpunktsgleichung, unter welcher die Astronomen die Differenz zwischen der wahren und mittleren Anomalie verstehen.

$$\text{Es ist} \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \cdot \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} E.$$

Durch Einführung von Exponentialgrößen erhält diese Gleichung, wenn $2,71828 \dots$ mit $[e]$ bezeichnet wird, die Form:

$$\frac{[e]^{iv} - 1}{[e]^{[iv]} + 1} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \frac{[e]^{iE} - 1}{[e]^{iE} + 1},$$

daher, wenn man $\frac{\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e} + \sqrt{1-e}} = \frac{e}{1 + \sqrt{1-e^2}} = k$ setzt:

$$[e]^{iv} = [e]^{iE} \cdot \frac{1 - k[e]^{-iE}}{1 + k[e]^{iE}},$$

logarithmirt man diese Gleichung, so ergibt sich:

$$iv = iE + \ln(1 - k[e]^{-iE}) - \ln(1 + k[e]^{iE}),$$

da $k < 1$ und der Modul von $[e]^{iE} = 1$ ist, so kann man die Logarithmen in Reihen entwickeln und erhält schliesslich, wenn man wieder zu den trigonometrischen Functionen übergeht:

$$v = E + 2 \left(k \sin E + \frac{k^2}{2} \cdot \sin 2E + \frac{k^3}{3} \cdot \sin 3E + \dots \right).$$

Um v nach steigenden Potenzen von e zu entwickeln, muss man mit den Potenzen von k beginnen. Es ist:

$$k = \frac{e}{1 + \sqrt{1-e^2}}, \quad \text{also:} \quad k = \frac{e}{2} + \frac{e}{2} \cdot k^2.$$

Setzt man daher in der Formel von LAGRANGE $x = k$, $y = \frac{e}{2}$, $\varphi(x) = \frac{k^2}{2}$, so ergibt sich, wenn man $f(x) = x^i$ annimmt:

$$k^i = \frac{e^i}{2^i} + \frac{i e^{i+2}}{2^{i+2}} + i(i+3) \cdot \frac{e^{i+4}}{2^{i+4}} + \frac{i \cdot (i+4)(i+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{e^{i+6}}{2^{i+6}} + \dots$$

Entwickelt man schliesslich noch E , $\sin E$, $\sin 2E \dots$ nach steigenden Potenzen von e , so erhält man nach gehöriger Reduction:

$$\begin{aligned} 11) \quad v = & M + e \cdot 2 \sin M + e^2 \cdot \frac{5}{4} \cdot \sin 2M \\ & + e^3 \cdot \left(\frac{13}{12} \cdot \sin 3M - \frac{1}{4} \sin M \right) \\ & + e^4 \left(\frac{103}{96} \sin 4M - \frac{11}{24} \sin 2M \right) \\ & + e^5 \left(\frac{1097}{960} \sin 5M - \frac{43}{64} \sin 3M + \frac{5}{96} \sin M \right) \\ & + e^6 \left(\frac{1223}{960} \sin 6M - \frac{451}{480} \cdot \sin 4M + \frac{17}{192} \sin 2M \right). \end{aligned}$$

Ehe man die Reihen 6—11 benutzt, muss man sich von ihrer Convergenz überzeugen. Dazu dient das auf S. 23 angegebene Kriterium. Die Gleichung:

$$E = M + e \sin E$$

hat zwei gleiche Wurzeln, wenn die Ableitungen beider Seiten nach E einander gleich sind:

$$1 = e \cos E, \quad \cos E = \frac{1}{e}, \quad \sin E = \sqrt{1 - \frac{1}{e^2}} = \frac{i}{e} \cdot \sqrt{1 - e^2},$$

und daher:

$$E = \arccos\left(\cos = \frac{1}{e}\right) = M + i \sqrt{1 - e^2}, \quad \text{also:}$$

$$\begin{aligned} 12) \quad \frac{1}{e} &= \cos(M + i \sqrt{1 - e^2}) = \cos M \cdot \cos i \sqrt{1 - e^2} \\ &\quad - \sin M \cdot \sin i \sqrt{1 - e^2} = \cos M \frac{[e]^{-\sqrt{1 - e^2}} + [e]^{+\sqrt{1 - e^2}}}{2} \\ &\quad - \sin M \cdot \frac{[e]^{-\sqrt{1 - e^2}} - [e]^{+\sqrt{1 - e^2}}}{2i}. \end{aligned}$$

Setzt man $M = 0$, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{1}{e} = \frac{[e]^{-\sqrt{1 - e^2}} + [e]^{+\sqrt{1 - e^2}}}{2},$$

deren kleinste Wurzel $e = 1$ ist.

Setzt man $M = \frac{\pi}{2}$, so ergibt sich:

$$\frac{1}{e} = \frac{[e]^{+\sqrt{1 - e^2}} - [e]^{-\sqrt{1 - e^2}}}{2i},$$

oder wenn man $ie = \alpha$ setzt:

$$2 = \alpha([e]^{\sqrt{1 + \alpha^2}} - [e]^{-\sqrt{1 + \alpha^2}})$$

und hieraus, wenn man nach $[e]^{\sqrt{1 + \alpha^2}}$ auflöst:

$$13) \quad 1 + \sqrt{1 + \alpha^2} = \alpha \cdot [e]^{\sqrt{1 + \alpha^2}}.$$

Die kleinste Wurzel dieser Gleichung ist:

$$\alpha = 0,66195 \dots, \quad e = -0,66195i.$$

Nimmt man für M irgend einen anderen Werth, so erhält man aus 12) für e eine Wurzel, deren Modul zwischen 0,66195 und 1 liegt und daher das Resultat:

Ist $e < 0,66195$, so convergiren die Reihen 6—11 bedingungslos,

Ist $1 > e > 0,66195$, so convergiren die Reihen 6—11 nur für einen Theil der Bahn.

Ist $e > 1$, so divergiren die Reihen 6—11 bedingungslos.

Für die grossen, um die Sonne kreisenden Planeten (Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun) ist e ein kleiner Bruch und sind diese Reihen daher sehr gut zu verwerthen. Aber schon für die Asteroiden ist ihre Convergenz zu langsam und bewältigen die Astronomen dann die KEPLER'sche Gleichung auf eine andere Weise.

Es lassen sich indessen für jeden Werth von e zwischen 0 und 1, wie BESSEL in seiner Abhandlung: Untersuchungen des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht (Abhandlungen Bd. I, S. 84) gezeigt hat, nach $\sin$ und $\cos$ der Vielfachen von M fortschreitende Reihenentwickelungen aufstellen, deren Coefficienten nach steigenden Potenzen von e fortschreitende Reihen sind. Zu diesen Entwickelungen kann man offenbar, von den Reihen 6—10, deren Bildungsgesetz zu Tage liegt, ausgehend, gelangen, indem man dieselben als doppelt unendliche Reihen ansieht und dann alle die Glieder zusammenfasst, welche denselben Winkel $n \cdot M$ enthalten. So erhält man z. B. in der Reihe 6) den Coefficienten von $\sin M$

$$= e - 3 \cdot \frac{e^3}{3!2^2} + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{e^5}{5!2^4} - \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{e^7}{7!2^6} \dots$$

u. s. w. Um die Untersuchung aber ganz allgemein führen zu können und namentlich die Convergenz hervortreten zu lassen, ist es zweckmässig, von FOURIER's Theorem über die Entwicklung einer Function in eine trigonometrische Reihe auszugehen:

Da $E - M = e \sin E$ stets unverändert bleibt, wenn M um 2π gewachsen ist, so muss sich nach diesem Theorem $E - M$ für alle Werthe von E in eine trigonometrische Reihe von der Form entwickeln lassen:

$$E - M = a_0 + a_1 \cos M + a_2 \cos 2M + a_3 \cos 3M + \dots \\ + b_1 \sin M + b_2 \sin 2M + b_3 \sin 3M + \dots$$

Dann ist nach FOURIER:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (E - M) dM = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e \sin E dM = 0,$$

da sich in diesem Integral die Elemente, welche von $M = 0$ bis

$M = \pi$ gehen, gegen die von $M = \pi$ bis $M = 2\pi$ gehenden zerstören. Ebenso ist:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (E - M) dM \cdot \cos nM = 0.$$

Es bleiben nur die b_n übrig. Es ist:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (E - M) dM \cdot \sin nM.$$

Wendet man hierauf die theilweise Integration an, so ergibt sich:

$$\int (E - M) \sin nM dM = -\frac{\cos nM}{n} (E - M) + \frac{1}{n} \int (dE - dM) \cos nM.$$

Integriert man also von 0 bis 2π , so fällt für die Grenzen $E - M$ weg und man erhält, da E ebenfalls von 0 bis 2π geht:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} (dE - dM) \cos nM \\ &= \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} dE \cdot \cos nM \\ &= \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} dE \cdot \cos n(E - e \sin E). \end{aligned}$$

Setzt man noch zur Abkürzung $n \cdot e = x$, so wird:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} dE \cdot \cos(nE - x \sin E) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos nE \cdot \cos(x \sin E) dE + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin nE \sin(x \sin E) dE \right]. \end{aligned}$$

Die Glieder der Klammer sind nach FOURIER's Theorem gleich den Coefficienten von $\cos nE$, resp. $\sin nE$ in der Entwicklung von $\cos(x \sin E)$, resp. $\sin(x \sin E)$ in eine trigonometrische Reihe. Diese

Entwicklung geschieht am einfachsten durch das Imaginäre hindurch, indem man setzt:

$$[e]^{iE} = z, \quad \text{dann ist:}$$

$$\sin E = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \quad \text{also:}$$

$$\cos(x \sin E) = \cos\left(\frac{x \cdot \left(z - \frac{1}{z}\right)}{2i}\right) = \frac{[e]^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} + [e]^{-\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)}}{2}$$

$$\sin(x \sin E) = \sin\left(\frac{x \left(z - \frac{1}{z}\right)}{2i}\right) = \frac{[e]^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} - [e]^{-\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)}}{2i}.$$

Nun ist:

$$[e]^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = [e]^{\frac{x \cdot z}{2}} \cdot [e]^{-\frac{x}{2z}} = \left(1 + \frac{xz}{2} + \frac{\left(\frac{xz}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{xz}{2}\right)^3}{3!} + \dots\right) \left(1 - \frac{x}{2z} + \frac{\left(\frac{x}{2z}\right)^2}{2!} - \frac{\left(\frac{x}{2z}\right)^3}{3!} + \dots\right).$$

Multipliziert man die beiden Reihen aus und ordnet nach Potenzen von z , so erhält man eine Reihe von der Form:

$$[e]^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = J_0(x) + z \cdot J_1(x) + z^2 \cdot J_2(x) + z^3 \cdot J_3(x) + \dots \\ - \frac{J_1(x)}{z} + \frac{J_2(x)}{z^2} - \frac{J_3(x)}{z^3} + \frac{J_4(x)}{z^4} - \dots$$

und es ergibt sich allgemein:

$$14) \quad J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \cdot n!} \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot (2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n+2)(2n+4)} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (2n+2)(2n+4)(2n+6)} + \dots\right).$$

Diese Reihe 14) nennt man eine BESSEL'sche Function. Sie hängt also von zwei Grössen ab, nämlich von x und n und besitzt viele merkwürdige Eigenschaften, unter welchen die wichtigsten sind, dass sie für jeden Werth von x endlich und zwischen -1 und $+1$ liegt. Dieses folgt unmittelbar aus der Definition:

$$15) \quad J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nE - x \sin E) dE,$$

da das Integral jedenfalls kleiner ist als:

$$\int_0^{2\pi} dE = 2\pi.$$

Ferner sind sämmtliche Wurzeln der Gleichung $J_n(x) = 0$ reell, so dass die Curve $y = J_n(x)$ wellenförmig verläuft, wie die Curve $y = \sin x$, nur mit dem Unterschied, dass die Wellen für die erste Curve immer flacher werden. Schliesslich sei noch erwähnt, dass man durch eine einfache Recursionsformel $J_{n+1}(x)$ durch $J_n(x)$ und $J_{n-1}(x)$ ausdrücken kann, so dass man durch die Transcendenten $J_0(x)$ und $J_1(x)$ die übrigen bestimmen kann.

Durch Einführung dieser Functionen*) erhält man:

$$\cos(x \sin E) = 2 [J_0(x) + J_2(x) \cdot \cos 2E + J_4(x) \cdot \cos 4E + J_6(x) \cdot \cos 6E \dots],$$

$$\sin(x \sin E) = 2 \cdot [J_1(x) \sin E + J_3(x) \sin 3E + J_5(x) \sin 5E + \dots].$$

Hieraus folgt: $b_n = \frac{2}{n} \cdot J_n(x) = \frac{2}{n} \cdot J_n(ne).$

$$16) \quad E - M = 2 \{ J_1(e) \sin M + \frac{1}{2} J_2(2e) \cdot \sin 2M + \frac{1}{3} J_3(3e) \cdot \sin 3M + \dots \}.$$

Mit Leichtigkeit kann man auch r , ξ und η mit Hilfe der BESSEL'schen Transcendenten ausdrücken. Setzt man:

$$r = a(1 - e \cos E) = a_0 + a_1 \cos M + a_2 \cos 2M + a_3 \cos 3M + \dots + b_1 \sin M + b_2 \sin 2M + \dots,$$

so ergibt sich zunächst $b_1 = b_2 = b_3 = \dots = 0$.

Ferner ist:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (a - ae \cos E) dM = a - \frac{ae}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos E \cdot dM \\ &= a - \frac{ae}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos E (1 - e \cos E) \cdot dE = \left(1 + \frac{e^2}{2}\right). \end{aligned}$$

*) Der Leser, welcher sich über diese BESSEL'schen Functionen, die auch in anderen Problemen eine Rolle spielen, orientiren will, findet die wichtigsten Eigenschaften derselben in dem Buche von TODHUNTER: An Elementary treatise on LAPLACE's functions, LAMÉ's functions and BESSEL's functions zusammengestellt.

und für $n > 0$:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} a (1 - e \cos E) \cos nM \cdot dM \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[a(1 - e \cos E) \cdot \frac{\sin nM}{n} \right]_0^{2\pi} - \frac{ae}{n} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin nM \sin E dE \\
 &= -\frac{ae}{n\pi} \int_0^{2\pi} \sin n(E - e \sin E) \sin E \cdot dE \\
 &= -\frac{ae}{n} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos [(n-1)E - ne \sin E] dE \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos [(n+1)E - ne \sin E] dE \right] = \frac{ae}{n} [J_{n+1}(ne) - J_{n-1}(ne)].
 \end{aligned}$$

und also:

$$17) \frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} + e \left[[J_2(e) - J_0(e)] \cos M + \frac{J_3(2e) - J_1(2e)}{2} \cos 2M \dots \right],$$

η ergibt sich sofort aus 16), denn es ist:

$$\frac{\eta}{a \sqrt{1 - e^2}} = \sin E = \frac{M - E}{e}.$$

Ebenso ergibt sich ξ aus 17), da:

$$\xi = \frac{a(1 - e^2) - r}{e}.$$

Umständlicher ist die Entwicklung von v und wird der Leser auf die Abhandlung von BESSEL: Analytische Auflösung der KEPLERschen Aufgabe (Abhandlungen I. Bd., S. 27) verwiesen.

Mit Leichtigkeit ergibt sich übrigens noch die Entwicklung von $\frac{1}{r}$. Denn es ist:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a(1 - e \cos E)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{dE}{dM},$$

also nach 16):

$$18) \quad \frac{a}{r} = 1 + 2[J_1(e)\cos M + J_2(2e)\cos 2M + J_3(3e)\cos 3M + \dots].$$

Nachdem auf diese Weise ξ und η als Functionen von t bestimmt sind, da M mit t durch die Gleichung:

$$M = nt + \varepsilon - \pi = \zeta - \pi$$

zusammenhängt, so können mit Hilfe der Gleichungen 19), § 2, x , y und z als Functionen von t hergestellt werden. Nimmt man noch an, dass e und i zwei kleine Grössen sind und begrenzt die Annäherung bei x und y mit der zweiten und bei z mit der ersten Potenz, so ergibt sich:

$$19) \quad \begin{cases} x = a \left\{ \cos \zeta + \frac{e}{2} [-3 \cos \pi + \cos 2(\zeta - \pi)] \right. \\ \quad \left. + \frac{e^2}{8} [3 \cos (3\zeta - 2\pi) - 4 \cos \zeta + \cos (2\pi - \zeta)] \right. \\ \quad \left. + \frac{i^2}{4} [\cos (2\Omega - \zeta) - \cos \zeta] \right\} \\ y = a \left\{ \sin \zeta + \frac{e}{2} [-3 \sin \pi + \sin (2\zeta - \pi)] \right. \\ \quad \left. + \frac{e^2}{8} [3 \sin (3\zeta - 2\pi) - 4 \sin \zeta + \sin (2\pi - \zeta)] \right. \\ \quad \left. + \frac{i^2}{4} [(\sin 2\Omega - \zeta) - \sin \zeta] \right\} \\ z = a \cdot i \cdot \sin (\zeta - \Omega). \end{cases}$$

Schliesslich folgt aus:

$$20) \quad r = a \left\{ 1 - e \cos (\zeta - \pi) + \frac{e^2}{2} [1 - \cos 2(\zeta - \pi)] \right\}$$

noch die später angewendete Gleichung:

$$21) \quad r^2 = a^2 \left\{ 1 - 2e \cos (\zeta - \pi) + \frac{e^2}{2} [3 - \cos 2(\zeta - \pi)] \right\}.$$

Man kann die Formeln 19) vervollständigen, indem man noch höhere Potenzen der Excentricität und Neigung berücksichtigt; jedoch wollen wir uns damit begnügen, ein Resultat abzuleiten, welches für die Folge von grosser Wichtigkeit ist.

Aus den Formeln 8) und 10) folgt, dass, wenn:

$$k \cdot e^\alpha \cdot \cos \lambda M, \quad \text{resp.} \quad k e^\alpha \sin \lambda M,$$

irgend ein Glied in der Entwicklung von ξ und η bedeutet und λ als positiv vorausgesetzt wird, dass dann stets:

$\alpha - \lambda$ eine ungerade Zahl und positiv oder $= -1$ ist.

Diejenigen Glieder von ξ , für welche $\alpha - \lambda = -1$ ist, sind folgende:

$$22) \quad a \left(\cos M + \frac{e}{2} \cos 2M + \frac{e^2}{2! 2^2} \cdot 3 \cos 3M + \frac{e^3}{3! 2^3} \cdot 4^2 \cos 4M + \frac{e^4}{4! 2^4} \cdot 5^5 \cos 5M + \dots \right)$$

und die entsprechenden für η sind:

$$23) \quad a \left(\sin M + \frac{e}{2} \sin 2M + \frac{e^2}{2! 2^2} \cdot 3 \sin 3M + \frac{e^3}{3! 2^3} \cdot 4^2 \sin 4M + \dots \right).$$

In der Formel 19), § 2, ist der Coefficient von ξ in x :

$$\begin{aligned} & \cos \pi + \sin \Omega \sin (\pi - \Omega) (1 - \cos i) \\ &= \cos \pi + \cos (2\Omega - \pi) \cdot \sin^2 \frac{i}{2} - \cos \pi \sin^2 \frac{i}{2}. \end{aligned}$$

Ebenso ergibt sich der Coefficient von η :

$$\begin{aligned} & -\sin \pi + \sin \Omega \cdot \cos (\pi - \Omega) (1 - \cos i) \\ &= -\sin \pi + \sin (2\Omega - \pi) \sin^2 \frac{i}{2} + \sin \pi \cdot \sin^2 \frac{i}{2}. \end{aligned}$$

Betrachtet man daher in ξ ein Glied von der Form $ke^\alpha \cos \lambda M = k \cdot e^\alpha \cos \lambda (\zeta - \pi)$, setzt es in 19), § 2, ein und entwickelt $\sin^2 \frac{i}{2}$ in eine nach Potenzen von i fortschreitende Reihe, so erhält man unter Benutzung der Formel $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)]$, in dem Ausdruck für x Glieder von der Form:

$$24) \quad \left\{ \begin{array}{l} ke^\alpha \cdot i^\beta \cos (\lambda \zeta + \gamma \pi + \delta \Omega) \\ \text{und zwar ist stets:} \\ \lambda + \gamma + \delta = +1 \quad \text{und} \quad \delta = 0, \quad \text{oder} \quad \delta = +2, \\ \text{ferner:} \\ \alpha + \beta - [\lambda]^*) \text{ ungerade und positiv, ausgenommen, wenn} \\ \beta = 0 \text{ ist, in welchem Falle } \alpha - [\lambda] \text{ auch } = -1 \text{ sein kann.} \end{array} \right.$$

Glieder von derselben Form werden durch Einsetzen von η erzeugt, so dass in x nur die in 24) angegebene Form anzutreffen ist.

*) $[x]$ ist hier der absolute Werth der Zahl x .

Mit Hilfe von 22) und 23) kann man übrigens die Glieder, für welche $\alpha - [\lambda] = -1$ ist, sofort hinschreiben. Sie sind:

$$25) \quad a \left[\cos \zeta + \frac{e}{2} \cos (2\zeta - \pi) + \frac{e^2}{2! 2^2} \cdot 3 \cos (3\zeta - 2\pi) \right. \\ \left. + \frac{e^3}{3! 2^3} \cdot 4^2 \cos (4\zeta - 3\pi) + \dots \right].$$

Ganz dieselben Resultate ergeben sich für y , nur dass man cosinus durch sinus zu ersetzen hat. Schliesslich folgt aus der Formel für z in 19), § 2, dass in z nur Glieder von der Form $k e^\alpha \cdot i^\beta \sin(\lambda \zeta + \gamma \pi + \delta \Omega)$ vorhanden sind, für welche $\lambda + \gamma + \delta = 0$, $\delta = \pm 1$ und $\alpha + \beta - [\lambda]$ gerade, positiv oder $= 0$ ist.

Diese Resultate wollen wir noch einmal zusammenstellen.

Die Entwicklung von x sei:

$$26) \quad x = \Sigma k \cdot e^\alpha \cdot i^\beta \cos (\lambda \zeta + \gamma \pi + \delta \Omega).$$

Dann ist die Entwicklung von y :

$$27) \quad y = \Sigma k \cdot e^\alpha \cdot i^\beta \sin (\lambda \zeta + \gamma \pi + \delta \Omega)$$

mit denselben Coefficienten k und zugleich ist:

$$28) \quad \begin{cases} \lambda + \gamma + \delta = +1, \delta = 0, \text{ oder } \delta = +2, \text{ so dass } \lambda + \gamma = \pm 1. \\ \alpha + \beta - [\lambda] \text{ ungerade und positiv, und wenn } \beta = 0 \text{ ist, im} \\ \text{äussersten Grenzfall} = -1. \end{cases}$$

Die Entwicklung von z sei:

$$29) \quad z = \Sigma k' \cdot e^\alpha i^\beta \sin (\lambda \zeta + \gamma \pi + \delta \Omega), \text{ dann ist:}$$

$$30) \quad \begin{cases} \lambda + \gamma + \delta = 0, \delta = \pm 1 \text{ und} \\ \alpha + \beta - [\lambda] \text{ gerade und positiv oder } = 0. \end{cases}$$

Zugleich ist in allen drei Fällen:

$$31) \quad \begin{cases} \alpha - [\gamma] \text{ gerade, positiv oder } 0, \\ \beta - [\delta] \text{ gerade, positiv oder } 0. \end{cases}$$

Die 5 Grössen $\alpha, \beta, \lambda, \gamma, \delta$ können alle möglichen, den Bedingungen 28—31 genügenden (positiven und negativen) ganzen Zahlen vorstellen, und handelt es sich dann nur noch um die Bestimmung der Coefficienten k und k' als Functionen der grossen Achse a . Diese Entwicklung ist die expediteste, insofern in ihr alle Elemente a, e, i, π, Ω mit Ausnahme von ε , welches aber in $\zeta = nt + \varepsilon$ enthalten ist, analytisch zum Ausdruck kommen. Ordnet man aber nur nach Vielfachen von ζ , so kann man die Entwicklung auch so ansetzen:

$$x = \Sigma(l \cos \lambda \zeta + m \sin \lambda \zeta),$$

$$y = \Sigma(l \sin \lambda \zeta - m \cos \lambda \zeta),$$

$$z = \Sigma(l' \sin \lambda \zeta + m' \cos \lambda \zeta).$$

§ 5.

Geschichtliche Uebersicht zu den §§ 1—4.

Die Kenntniss des NEWTON'schen Gravitationsgesetzes, heute die Quelle unserer Erklärungen der Bewegungen am Himmelsgewölbe, ist uns erschlossen worden durch eine aufmerksame und vorurtheilsfreie Beobachtung, durch eine geringe Zahl von sehr wahrscheinlichen Hypothesen und durch die geniale Kühnheit und Ausdauer der mathematischen Analyse.

Schon wenige Minuten genügen für den Beobachter des gestirnten Himmels, um zu zeigen, dass die Sterne ihre Stellung in Bezug auf die Erde verändern und einige Aufmerksamkeit zeigt bald, dass sie sämmtlich in derselben Zeit um einen Punkt Kreise beschreiben, in dessen Nähe der Polarstern sich befindet. Es ist hier nicht der Ort, näher auszuführen, aus welchen Gründen KOPERNIKUS dahin geführt worden ist, diese Bewegungen als Reflexe einer einzigen Drehung anzusehen und so die Hypothese aufzustellen: Die Erde ist ein freischwebender, um eine, durch ihre beiden Pole gehende Achse gleichförmig sich drehender Körper.

Zieht man darnach von der scheinbaren Bewegung der Gestirne diese Drehung ab, so bleiben sie — wenigstens für das unbewaffnete Auge und für ein Menschenalter — in Ruhe. Eine Ausnahme machen die Sonne, der Mond, die Planeten und Kometen, von denen die beiden ersteren ziemlich gleichmässig in grössten Kreisen am ruhenden Himmelsgewölbe sich bewegen und die anderen ausserordentlich merkwürdige Unregelmässigkeiten, welche schon sehr früh die Aufmerksamkeit auf sich gelenkt, zeigen.

Unter Zugrundelegung der Hypothese der ruhenden Erde unternahm es PTOLEMAEUS (CLAUDIUS) im zweiten Jahrhundert nach Christus, in seinem, später Amalgest genannten Werke, die beobachteten Bewegungen auf Kreise oder vielmehr auf Combinationen von Kreisbahnen zurückzuführen und wenn seine Annahmen auch heute verworfen werden, so muss man doch zugeben, dass sie die roheren Beobachtungen des Alterthums genau erklärten. Wie sich die Unregelmässigkeiten häuften, war man gezwungen, immer mehr Kreise

zu Cyclen zu combiniren und schliesslich wurde das ganze Räderwerk so complicirt, dass nur Wenige es vollständig durchschauen konnten und diese Wenigen mit dem Nimbus ungeheurer Gelehrsamkeit umgeben wurden. Dieser Umstand, verbunden mit der Pietät, die man früher den Autoritäten zollte, liessen den Amalgest als das unbestritten Wahre erscheinen und irgend eine Erklärung war richtig oder nicht, je nachdem sie mit demselben übereinstimmte oder nicht. Die Hypothese von der Rotation der Erde, welche schon von den Pythagoräern und Aristarchos aufgestellt wurde, gerieth fast ganz in Vergessenheit, bis endlich KOPERNIKUS (1473—1543) mit der Begründung des nach ihm benannten Weltsystems in dem kurz vor seinem Tode gedruckten Werke: „De orbium coelestium revolutionibus, libri VI“ hervortrat und ein Lehrgebäude zertrümmerte, welches 13 Jahrhunderte vollkommen geherrscht. Indem er die Erde sich drehen und um die Sonne kreisen lässt, gelangt er zu der Thatsache, dass die Bahnen sämtlicher Planeten Kreise sind und erklärt die beobachteten Unregelmässigkeiten durch den Umstand, dass wir diese Kreise von einem selbst bewegten Standpunkt aus betrachten. Doch behielt er die Kreisbewegung bei und machte nur die Annahme, dass das Centrum nicht ganz mit der Sonne zusammenfalle.

Es ist bewunderungswürdig, wie von nun an durch wenige bevorzugte Geister, von denen jeder genau da einsetzte, wo der Andere abberufen wurde, das Gravitationsgesetz an das Licht gebracht worden ist. TYCHO DE BRAHE (1546—1601) stellte mit vervollkommenen Instrumenten neue Beobachtungen besonders über den Planeten Mars an. Auf sie gestützt gelang es KEPLER (1571—1630) unter Zugrundelegung der Kopernikanischen Ideen nach und nach die drei Gesetze zu finden, welche seinen Namen führen und welche er besonders in den beiden Werken „De stella Martis“ und „Harmonia mundi“ niederlegte. Auch hat er bereits klare Anschauungen von einer universellen Gravitation ausgesprochen; doch musste er, von Anstrengungen und Kummer überwältigt, die Krönung seines Werkes einem Nachfolger überlassen, welcher durch die tiefste Synthese die kühne und glückliche Speculation eines KEPLER ersetzte.

Inzwischen wurden durch KEPLER's Zeitgenossen GALILEI (1564—1642) die Grundlagen der Mechanik, besonders in dem Werke: „Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze“ geschaffen und so diese Wissenschaft aus dem tausendjährigen Schlaf, in welchen sie nach ARCHIMEDES Tode versunken, erweckt. Sein Todesjahr war das Geburtsjahr ISAAC NEWTON's, welcher 1666 die

erste Idee der Schwere fasste und das allgemeine Gravitationsgesetz in dem 1686 erschienenen Werk: „*Philosophiae naturalis principia mathematica*“ wissenschaftlich begründete. Es kann seinen Ruhm nicht schmälern, dass schon vor ihm BOULLIAU dieses Gesetz als eine Vermuthung ohne jeden Beweis ausgesprochen hat. NEWTON gelang auch der umgekehrte Schluss vom Gravitationsgesetz auf die KEPLER'schen Gesetze vollständig und dehnte er die Gültigkeit derselben auch auf die Kometen, diese Schreckbilder einer früheren Zeit, aus.

NEWTON's überwältigendes Genie tritt in besonders helles Licht, wenn man den damaligen Zustand der Wissenschaft erwägt. Die Mechanik war kaum in ihren Grundzügen fertig, die Differential- und Integralrechnung im ersten Entstehen, wurde bekanntlich von NEWTON selbst ausserordentlich gefördert und der grosse analytische Apparat, mit dessen Hilfe die Beweise eine so ausserordentliche Einfachheit und Durchsichtigkeit erreichen, noch nicht vorhanden. NEWTON's Verfahren war daher vorwiegend synthetisch und gehört heute noch, wo die analytischen Methoden so sehr in den Vordergrund gestellt worden sind, sein Werk zu den schwierigeren.

Mit der Ausbildung der Analysis, welche man besonders LEIBNITZ und den BERNOULLI's verdankt, vereinfachten sich die Betrachtungen und wurde das Problem auf das von uns zum Ausgangspunkt gewählte System von drei totalen simultanen Differentialgleichungen reducirt und deren Integration durch die verschiedensten Methoden bewerkstelligt. Hier ist der von LAPLACE in seiner *Mécanique céleste* eingeschlagene Weg beibehalten worden. Die Literatur über diesen Gegenstand und besonders über die Darstellung der Coordinaten vermittelt der KEPLER'schen Gleichung ist eine ausserordentlich grosse und sind hier EULER, GAUSS, LAGRANGE, BESSEL u. A. zu nennen.

§ 6.

Das Problem der n Körper. Die allgemeinen Integrale desselben.

Wenn mehr als zwei Punkte sich nach dem NEWTON'schen Gravitationsgesetz anziehen, so erhält man nach dem Princip der Zusammensetzung der Kräfte die Componenten der auf einen Punkt wirkenden Kraft nach einer Richtung durch Addition der von den übrigen Punkten dem Gesetz gemäss sich ergebenden Componenten. Bezeichnet man daher die Punkte mit $P_1, P_2, \dots P_n$ und die für jeden

geltenden Grössen mit dem entsprechenden Index und schliesslich die Entfernung zweier Punkte P_λ und P_μ mit $r_{\lambda\mu}$, so dass:

$$1) \quad r_{\lambda\mu} = \sqrt{(x_\lambda - x_\mu)^2 + (y_\lambda - y_\mu)^2 + (z_\lambda - z_\mu)^2},$$

so erhält man für die Componenten $m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2}$, $m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2}$, $m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2}$ des ersten Punktes nach § 1, 2), und nach dem Satz vom Parallelogramm der Kräfte:

$$2) \quad \left\{ \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= k^2 \left(m_1 \cdot m_2 \frac{x_2 - x_1}{r_{12}^3} + m_1 \cdot m_3 \frac{x_3 - x_1}{r_{13}^3} + \dots \right. \\ &\quad \left. + m_1 \cdot m_n \frac{x_n - x_1}{r_{1n}^3} \right), \\ m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= k^2 \left(m_1 \cdot m_2 \frac{y_2 - y_1}{r_{12}^3} + m_1 \cdot m_3 \frac{y_3 - y_1}{r_{13}^3} + \dots \right. \\ &\quad \left. + m_1 \cdot m_n \frac{y_n - y_1}{r_{1n}^3} \right), \\ m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= k^2 \left(m_1 \cdot m_2 \frac{z_2 - z_1}{r_{12}^3} + m_1 \cdot m_3 \frac{z_3 - z_1}{r_{13}^3} + \dots \right. \\ &\quad \left. + m_1 \cdot m_n \frac{z_n - z_1}{r_{1n}^3} \right). \end{aligned} \right.$$

Entsprechende Gleichungen für die übrigen Punkte erhält man durch einfache Vertauschung der Indices. Man kann denselben eine ausserordentlich elegante Form geben, wenn man bedenkt, dass die rechten Seiten der Gleichungen 2) die partiellen Ableitungen einer Function der Coordinaten nach derjenigen Coordinate sind, deren bewegende Kräfte auf der linken Seite stehen. Diese Function ist, wie man sich durch Ausführung der Differentiation sofort überzeugt:

$$3) \quad \left\{ \begin{aligned} V &= k^2 \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \dots + \frac{m_{n-1} \cdot m_n}{r_{(n-1)n}} \right) \\ &= k^2 \sum \frac{m_\lambda m_\mu}{r_{\lambda\mu}}. \end{aligned} \right.$$

Diese Function, auf deren Existenz zuerst LAGRANGE hingewiesen, wird nach GREEN's (1828) und GAUSS' (1839) Vorgange Potential der Kräfte genannt. Sie spielt bekanntlich auch in vielen anderen Zweigen der Mechanik und Physik eine grosse Rolle. Mit Einführung des Potentials V nehmen die Gleichungen 2) die einfache Gestalt an:

$$4) \quad \begin{cases} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x_1}; & m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y_1}; & m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z_1}, \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x_2}; & m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y_2}; & m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z_2}, \\ \dots & \dots & \dots \end{cases}$$

V genügt mehreren partiellen Differentialgleichungen, aus welchen sich sofort mit Hilfe von 4) integrable totale Differentialgleichungen machen lassen. Dieselben ergeben sich aus dem Umstande, dass V nur von den Entfernungen der Punkte abhängig, von der Wahl des Coordinatensystems also ganz unabhängig ist. V ändert sich demnach nicht, wenn man alle x um eine Constante α vermehrt, weil eine solche Vermehrung einer Verschiebung des Anfangspunktes um $-\alpha$ in der Richtung der $+x$ Achse entspricht. Es ist also:

$$V = V'(x_1 + \alpha, x_2 + \alpha, \dots x_n + \alpha).$$

V' ist daher von α unabhängig und also:

$$\frac{\partial V'}{\partial \alpha} = \frac{\partial V'}{\partial x_1} + \frac{\partial V'}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial V'}{\partial x_n} = 0,$$

und wenn man endlich $\alpha = 0$ setzt und die entsprechenden Gleichungen bildet:

$$5) \quad 0 = \sum \frac{\partial V}{\partial x}, \quad 0 = \sum \frac{\partial V}{\partial y}, \quad 0 = \sum \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Ferner ändert sich V nicht, wenn man für y und z setzt:

$$y' = y \cos \varphi - z \sin \varphi,$$

$$z' = y \sin \varphi + z \cos \varphi,$$

weil diese Transformation einer Drehung um die x Achse von der Grösse φ entspricht. Es ist daher:

$$V = V'(y_1' z_1', y_2' z_2' \dots)$$

und also:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial V'}{\partial \varphi} = \frac{\partial V'}{\partial y_1'} \cdot \frac{\partial y_1'}{\partial \varphi} + \frac{\partial V'}{\partial z_1'} \cdot \frac{\partial z_1'}{\partial \varphi} + \dots \\ &= -\frac{\partial V'}{\partial y_1'} \cdot z_1' + \frac{\partial V'}{\partial z_1'} \cdot y_1' \dots \end{aligned}$$

und wenn man schliesslich noch $\varphi = 0$ setzt:

$$\begin{aligned} y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

$$6) \quad \begin{cases} 0 = \sum \left(y \frac{\partial V}{\partial z} - z \frac{\partial V}{\partial y} \right) \\ 0 = \sum \left(z \frac{\partial V}{\partial x} - x \frac{\partial V}{\partial z} \right), \\ 0 = \sum \left(x \frac{\partial V}{\partial y} - y \frac{\partial V}{\partial x} \right). \end{cases} \quad \text{und ebenso:}$$

Aus 4) und 5) ergibt sich sofort:

$$7) \quad 0 = \sum m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad 0 = \sum m \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad 0 = \sum m \frac{d^2 z}{dt^2}$$

und durch einmalige Integration:

$$8) \quad \sum m \frac{dx}{dt} = a, \quad \sum m \frac{dy}{dt} = b, \quad \sum m \frac{dz}{dt} = c.$$

Schliesslich folgt aus einer nochmaligen Integration:

$$9) \quad \begin{cases} \sum m x = at + a_1, \\ \sum m y = bt + b_1, \\ \sum m z = ct + c_1, \end{cases}$$

welche Gleichungen, in denen a, b, c, a_1, b_1, c_1 sechs Integrations-constante bedeuten, das Gesetz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes begründen. Denn bezeichnet man die Coordinaten desselben mit ξ, η und ζ und die Gesamtmasse $\sum m$ mit M , so ist:

$$10) \quad \xi = \frac{\sum m x}{M}, \quad \eta = \frac{\sum m y}{M}, \quad \zeta = \frac{\sum m z}{M},$$

und daher:

$$11) \quad \begin{cases} M\xi = at + a_1, \\ M\eta = bt + b_1, \\ M\zeta = ct + c_1. \end{cases}$$

Durch Elimination von t erhält man aus 11) zwei unabhängige Gleichungen ersten Grades zwischen ξ, η, ζ . Der Schwerpunkt bewegt sich daher auf einer geraden Linie mit constanter Geschwindigkeit.

$$\text{Dieselbe ist} = \sqrt{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{M}.$$

Wenn $a = b = c = 0$, so bleibt der Schwerpunkt in Ruhe.

Die Sonne mit ihren Planeten und Kometen bildet ein abgeschlossenes System, dessen einzelne Theile unter sich gravitiren, wäh-

rend die äusseren Kräfte, also hier die Anziehungen der Fixsterne, deren grosser Entfernung wegen, sehr klein sind. Der Schwerpunkt unseres Sonnensystems (welcher in der Regel noch in die Sonne selbst hineinfällt) wird daher, wenn er sich überhaupt bewegt, innerhalb ungezählter Jahrtausende gleichförmig in derselben Richtung fortschreiten. Diese Bewegung nennt man die Eigenbewegung der Sonne (richtiger des Sonnensystems). Es ist zum ersten Male aus den beobachteten Eigenbewegungen der Fixsterne von GAUSS mit grosser Wahrscheinlichkeit gefolgert worden, dass unsere Sonne dem Sternbild des Herkules zustrebt. Neuere spectroscopische Untersuchungen haben dieses Resultat bestätigt.

Aus 4) und 6) folgt sofort:

$$12) \quad \begin{cases} 0 = \sum m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right), \\ 0 = \sum m \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right), \\ 0 = \sum m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right). \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind sofort integrabel und ergeben:

$$13) \quad \begin{cases} C_1 = \sum m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right), \\ C_2 = \sum m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right), \\ C_3 = \sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right). \end{cases}$$

Die Gleichungen 13) pflegt man die Flächenintegrale zu nennen, weil sie nach § 1, S. 5, aussagen, dass die Summen der Producte aus den Massen und den von den Projectionen des Radius-vector auf die Coordinatenebenen beschriebenen Flächen der Zeit proportional wachsen.

Man erhält noch ein Integral der Gleichungen 4), wenn man sie der Reihe nach mit $dx_1, dx_2, \dots, dy_1, dy_2, \dots, dz_1, dz_2, \dots$ multiplicirt und addirt:

$$\begin{aligned} & \sum m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{d^2 z}{dt^2} \cdot \frac{dz}{dt} \right) \\ &= \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \right), \end{aligned}$$

und daher durch Integration:

$$14) \quad \frac{1}{2} \sum m \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \right) = V + C.$$

Diese Gleichung ist für den vorliegenden Fall das Princip der lebendigen Kraft. Dasselbe sagt aus, dass die lebendige Kraft, d. h. die halbe Summe aus den Producten der Massen und der Quadrate der Geschwindigkeiten sich von dem Potential der wirkenden Kräfte nur um eine Constante unterscheidet.

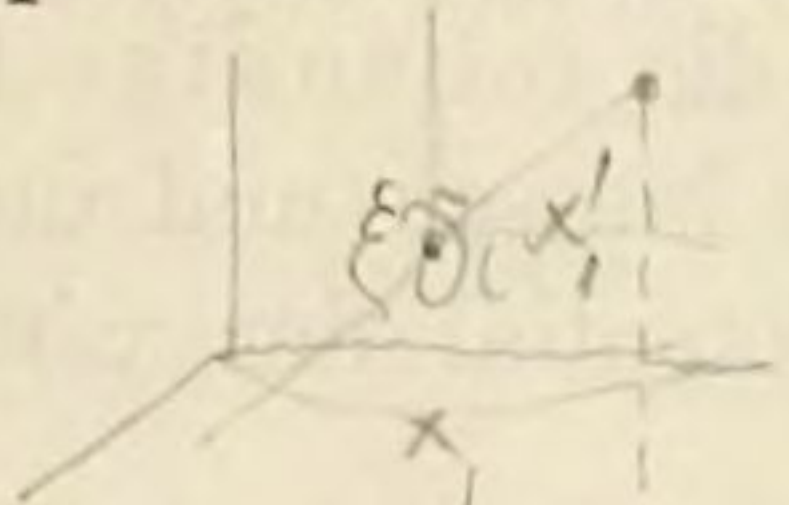
Aus diesem Princip folgt eine sehr wichtige Bemerkung. Die lebendige Kraft und also irgend eine Geschwindigkeit kann nach 14) nur dann unendlich werden, wenn V unendlich, d. h. wenn eine oder mehrere Entfernungen der Punkte $= 0$ werden. In diesem Falle haben aber die Differentialgleichungen 4) keinen Sinn mehr, weil die rechten Seiten zum Theil unendlich werden. Die Regeln der Differential- und Integralrechnung können also nur bis zum Moment des Zusammenstosses zweier Punkte angewendet werden und liegt daher den Betrachtungen stillschweigend die Voraussetzung zu Grunde, dass dieser Fall niemals eintritt, wenigstens nicht für den gewählten Zeitraum.

Die Integrale 9), 13) und 14) sind die einzigen, welche man bis jetzt im allgemeinen Falle hat ableiten können. Da es den Bemühungen der hervorragendsten Mathematiker nicht gelungen ist, noch weitere zu entdecken, so scheint die Reihe der algebraischen Integrale hiermit erschöpft zu sein. *) Wenn auch ihre Untersuchungen, wie die späteren Paragraphen zeigen werden, grosse Früchte getragen haben, so geht doch gerade aus ihnen hervor, dass aller Wahrscheinlichkeit nach die bis jetzt eingeführten analytischen Functionen zur Lösung der Aufgabe nicht genügen. Ueberhaupt muss es ja allgemein als Regel gelten, dass ein System von Differentialgleichungen den Bemühungen um seine Integration spottet und nur ein allgemein durchgeführtes Studium wird wohl im Stande sein, das Dunkel, welches auch über dem hier vorliegenden Falle schwebt, zu verscheuchen, da er, wie man sicher annehmen kann, aus dem allgemeinen Rahmen nicht heraustritt.

Da der Schwerpunkt eine so wichtige Rolle spielt, so empfiehlt es sich sehr häufig, die Bewegungen auf ihn zu beziehen, indem man

*) In allerneuester Zeit hat Herr Professor BRUNS den Nachweis geführt, dass weder algebraische noch solche Integrale, die zu den ABEL'schen gehören, weiter existiren.

ein bewegliches Coordinatensystem einführt, dessen Anfangspunkt beständig mit ihm zusammenfällt und dessen Achsen denen des ursprünglichen parallel bleiben. Bezeichnet man die Coordinaten dieses Systems durch oben rechts angebrachte Striche und die Coordinaten des Schwerpunktes für das ruhende System mit ξ, η, ζ , so ist zunächst:

15) 
$$\begin{cases} x_1 = x_1' + \xi, \\ y_1 = y_1' + \eta, \\ z_1 = z_1' + \zeta \end{cases}$$

u. s. w. Führt man dies in 4) ein, so fallen rechts ξ, η, ζ ohne Weiteres heraus und auch links geschieht dasselbe, da $\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0$. Mit anderen Worten:

Das NEWTON'sche Gravitationsgesetz gilt auch für die relativen Bewegungen um den Schwerpunkt.

Die Gesamtbewegung des Systems ist demnach in zwei ganz von einander gesonderte Elemente zerlegt worden, nämlich in eine unveränderliche Bewegung des Systems als Ganzes, als dessen Repräsentant der Schwerpunkt anzusehen ist, und eine gegenseitige Ortsveränderung, welche den Schwerpunkt nicht alterirt.

Die Integrale 9), 13), 14) müssen noch für die gestrichelten Coordinaten gültig bleiben, nur dass die Integrationsconstanten andere Werthe, die ebenfalls durch rechts angebrachte Striche bezeichnet werden sollen, annehmen. Natürlich ist sofort:

$$a' = b' = c' = a_1' = b_1' = c_1' = 0.$$

Ferner ergibt sich aus 15):

$$\begin{aligned} \sum m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) &= \sum m \left(y' \frac{dz'}{dt} - z' \frac{dy'}{dt} \right) + \eta \sum m \frac{dz'}{dt} \\ &\quad - \zeta \sum m \frac{dy'}{dt} - \frac{d\eta}{dt} \cdot \sum m z' + \frac{d\zeta}{dt} \cdot \sum m y' \\ &\quad + M \left(\eta \frac{d\zeta}{dt} - \zeta \frac{d\eta}{dt} \right), \end{aligned}$$

da nun $\sum m x' = \sum m y' = \sum m z' = 0$ und nach 11):

$$\eta \frac{d\zeta}{dt} - \zeta \frac{d\eta}{dt} = \frac{b_1 c - c_1 b}{M^2},$$

so ergibt sich:

$$16) \quad \begin{cases} \sum m \left(y' \frac{dz'}{dt} - z' \frac{dy'}{dt} \right) = C_1' = C_1 - \frac{b_1 c - c_1 b}{M}, \\ \sum m \left(z' \frac{dx'}{dt} - x' \frac{dz'}{dt} \right) = C_2' = C_2 - \frac{c_1 a - a_1 c}{M}, \\ \sum m \left(x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \right) = C_3' = C_3 - \frac{a_1 b - b_1 a}{M}. \end{cases}$$

Endlich erhält man:

$$17) \quad \sum \frac{m}{2} \cdot \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \sum \frac{m}{2} \frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{dt^2} + \sum \frac{m}{2} \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{dt^2}.$$

Eine Gleichung, welche aussagt, dass die lebendige Kraft irgend eines Systems gleich der lebendigen Kraft der relativen Bewegung um den Schwerpunkt, vermehrt um die lebendige Kraft der Bewegung des Schwerpunktes ist, wenn man in ihn die Gesamtmasse verlegt denkt.

Aus 14) erhält man also:

$$18) \quad \sum \frac{1}{2} m \left(\frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{dt^2} \right) = V' + C' = V + C - \frac{1}{2} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{M}.$$

V' bedeutet hier dasselbe wie V , nur dass die relativen Coordinaten eingeführt worden sind.

Die Gleichung 17) ist von LAGRANGE in eine andere Gestalt gebracht worden, in welcher sie eine interessante Anwendung auf die sogenannte Stabilität zulässt.

Multiplicirt man die Gleichungen 4), nachdem man gestrichelte Buchstaben eingeführt hat, der Reihe nach mit x_1', y_1', z_1' u. s. w., so erhält man, da V eine homogene Function vom 1^{ten} Grade der Coordinaten ist und daher der partiellen Differentialgleichung:

$$\sum \frac{\partial V}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot y + \frac{\partial V}{\partial z} = -V$$

genügt, die Gleichung:

$$19) \quad \sum m \left(x' \frac{d^2 x'}{dt^2} + y' \frac{d^2 y'}{dt^2} + z' \frac{d^2 z'}{dt^2} \right) = -V',$$

und, wenn man die mit 2) multiplicirte Gleichung 18) addirt:

$$20) \quad \frac{d^2 \left[\sum \frac{m}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2) \right]}{dt^2} = V' + 2C'.$$

Dieser Gleichung kann man eine Form geben, in welcher nur die gegenseitigen Entfernungen der Planeten vorkommen.

Es ist:

$$r_{\lambda\mu}^2 = (x'_\lambda - x'_\mu)^2 + (y'_\lambda - y'_\mu)^2 + (z'_\lambda - z'_\mu)^2 = x_\lambda'^2 + y_\lambda'^2 + z_\lambda'^2 + x_\mu'^2 + y_\mu'^2 + z_\mu'^2 - 2(x'_\lambda \cdot x'_\mu + y'_\lambda \cdot y'_\mu + z'_\lambda \cdot z'_\mu).$$

Durch Multiplication mit $m_\lambda m_\mu$ und Addition der entstehenden Gleichungen erhält man:

$$\begin{aligned} \sum m_\lambda \cdot m_\mu \cdot r_{\lambda\mu}^2 &= \sum m_\lambda \cdot m_\mu [(x_\lambda'^2 + y_\lambda'^2 + z_\lambda'^2) + (x_\mu'^2 + y_\mu'^2 + z_\mu'^2)] \\ &- \sum 2m_\lambda m_\mu (x'_\lambda x'_\mu + y'_\lambda y'_\mu + z'_\lambda z'_\mu) = M \cdot \sum m_\lambda (x_\lambda'^2 + y_\lambda'^2 + z_\lambda'^2) \\ &- \sum [m_\lambda^2 (x_\lambda'^2 + y_\lambda'^2 + z_\lambda'^2) + 2m_\lambda m_\mu (x'_\lambda x'_\mu + y'_\lambda y'_\mu + z'_\lambda z'_\mu)]. \end{aligned}$$

Die letzte Summe ist aber ohne Weiteres $= (\sum m_\lambda x'_\lambda)^2 + (\sum m_\lambda y'_\lambda)^2 + (\sum m_\lambda z'_\lambda)^2 = 0$, und daher geht 18) über in:

$$21) \quad \frac{1}{2M} \cdot \frac{d^2 (\sum m_\lambda \cdot m_\mu \cdot r_{\lambda\mu}^2)}{dt^2} = V' + 2C'.$$

V' ist stets positiv. Ist daher C' auch positiv, so ist die rechte Seite positiv und grösser als $2C'$. Der erste Differentialquotient von $\sum m_\lambda \cdot m_\mu r_{\lambda\mu}^2$ wächst daher beständig. Wenn er also auch ursprünglich negativ sein sollte, so wird er bei einem bestimmten Zeitpunkt $= 0$ und von da an positiv, so dass dann $\sum m_\lambda m_\mu r_{\lambda\mu}^2$ mit beschleunigter Schnelligkeit bis zur Unendlichkeit zunimmt. Eine Entfernung $r_{\lambda\mu}$ muss daher mindestens unendlich werden, d. h. mindestens ein Punkt muss sich von den übrigen ins Unendliche entfernen. Versteht man daher unter Stabilität des Systems die Bedingung, dass diese Entfernungen stets endlich bleiben (d. h. nie $= 0$ oder $= \infty$ werden), so erhält man:

Damit ein System stabil ist, darf die Constante C' nicht positiv (Null mit eingeschlossen) sein, d. h. die lebendige Kraft muss kleiner sein als das Potential.

Man darf allerdings nicht umgekehrt daraus schliessen, dass, wenn C' negativ ist, auch das System stabil ist. Es lässt sich dann nur die theilweise Stabilität behaupten, insofern, als nicht alle Entfernungen unendlich werden können. Denn wenn alle Punkte in die Unendlichkeit auseinander fliehen, so wird $V' = 0$ und die rechte

Seite von 20) negativ. Es müsste also $\sum m_\lambda m_\mu r_{\lambda\mu}^2$ schliesslich wieder kleiner werden, und zwei Punkte mindestens sich wieder nähern, was unmöglich ist, da die Anziehungskraft in der Unendlichkeit $= 0$ wird.

Der Begriff der vollständigen Stabilität, wie er oben aufgestellt worden ist, ist für die Astronomie von der höchsten Wichtigkeit. Unser Sonnensystem, wenn man darunter nur die Sonne und ihre Planeten versteht, ist aller Wahrscheinlichkeit nach ein stabiles System. Die Anstrengungen von LAPLACE und LAGRANGE und neuerer Astronomen gipfeln in dem Stabilitätsproblem und haben gezeigt, dass man den Begriff desselben für das Sonnensystem noch viel enger fassen kann. Leider aber ist es ihren Bemühungen nicht gelungen, einen vollständig strengen Beweis zu liefern, so wie überhaupt die Bedingungen der Stabilität festzustellen, so dass man nur im Stande ist zu sagen: Unser Sonnensystem kann stabil sein, oder ist mit sehr grosser Wahrscheinlichkeit stabil, wenn man diesen Begriff auf unbegrenzte Zeiträume ausdehnt.

Schliesslich wollen wir noch in diesem Paragraphen den Begriff der unveränderlichen Ebene, wie ihn LAPLACE für unser Sonnensystem aufgestellt hat, erörtern.

Die Ausdrücke

$$y' \frac{dz'}{dt} - z' \frac{dy'}{dt}, \quad z' \frac{dx'}{dt} - x' \frac{dz'}{dt}, \quad x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt}$$

haben die sehr bemerkenswerthe Eigenschaft, dass sie bei einer Drehung des Coordinatensystems sich ebenso transformiren, wie die Coordinaten selbst. Denn setzt man die bekannten Transformationsformeln an:

$$22) \quad \begin{cases} x'' = x' \alpha_1 + y' \beta_1 + z' \gamma_1 \\ y'' = x' \alpha_2 + y' \beta_2 + z' \gamma_2 \\ z'' = x' \alpha_3 + y' \beta_3 + z' \gamma_3, \end{cases}$$

so ergibt sich, wenn man obige Ausdrücke mit A' , B' , C' und die transformirten mit A'' , B'' , C'' bezeichnet, aus 21):

$$A'' = A' (\beta_2 \gamma_3 - \gamma_2 \beta_3) + B' (\gamma_2 \alpha_3 - \alpha_2 \gamma_3) + C' (\alpha_2 \beta_3 - \beta_2 \alpha_3),$$

oder, vermöge der bekannten Relationen zwischen den 9 Coefficienten:

$$23) \quad \begin{cases} A'' = A' \alpha_1 + B' \beta_1 + C' \gamma_1 \\ B'' = A' \alpha_2 + B' \beta_2 + C' \gamma_2 \\ C'' = A' \alpha_3 + B' \beta_3 + C' \gamma_3. \end{cases}$$

Bezeichnet man demnach die Constanten, welche in 16) an Stelle von C_1' , C_2' , C_3' treten, mit C_1'' , C_2'' , C_3'' , so erhält man ebenso:

$$24) \quad \begin{cases} C_1'' = C_1' \alpha_1 + C_2' \beta_1 + C_3' \gamma_1 \\ C_2'' = C_1' \alpha_2 + C_2' \beta_2 + C_3' \gamma_2 \\ C_3'' = C_1' \alpha_3 + C_2' \gamma_2 + C_3' \gamma_3. \end{cases}$$

Die Integrationsconstanten transformiren sich also ebenso wie die Coordinaten selbst. Wählt man schliesslich das neue Coordinatensystem so, dass $C_2'' = C_3'' = 0$, so bestimmen diese beiden Gleichungen allerdings die Lage der y'' und z'' Achse nicht vollständig, dagegen die der x'' Achse. Denn aus ihnen ergiebt sich:

$$C_1' : C_2' : C_3' = \beta_2 \gamma_3 - \gamma_2 \beta_3 : \gamma_2 \alpha_3 - \alpha_2 \gamma_3 : \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2 = \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1,$$

und daher:

$$25) \quad \alpha_1 = \frac{C_1'}{\sqrt{C_1'^2 + C_2'^2 + C_3'^2}}, \quad \beta_1 = \frac{C_2'}{\sqrt{C_1'^2 + C_2'^2 + C_3'^2}},$$

$$\gamma_1 = \frac{C_3'}{\sqrt{C_1'^2 + C_2'^2 + C_3'^2}}, \quad \text{und:}$$

$$26) \quad C_1'' = \sqrt{C_1'^2 + C_2'^2 + C_3'^2}.$$

Die auf diese Weise bestimmte $y'' z''$ Ebene nennt LAPLACE die unveränderliche Ebene. Für dieselbe ist die Summe der Flächen ein Maximum, während sie für jede durch die x'' Achse gehende Ebene $= 0$ ist. Die unveränderliche Ebene weicht für das Sonnensystem nur wenig von der Ebene der Ekliptik ab und sie hat vor der letzteren, so wie vor der Ebene des Aequators, auf welche beiden man in der Regel die sphärischen Coordinaten der Gestirne bezieht, den ausserordentlichen Vorzug der absoluten Unveränderlichkeit, während jene im Laufe der Jahrtausende ganz bedeutend ihre Lage im Raume wechseln. Indessen ist dieser Vorzug vorläufig noch illusorisch, da man die Planetenmassen noch nicht genau genug kennt, um diese Ebene scharf zu bestimmen und andererseits alle astronomischen Tafeln sich auf die Ekliptik oder den Aequator beziehen.

Befinden sich in einem Zeitmoment alle Punkte in einer Ebene und sind auch alle Geschwindigkeiten in dieser Ebene enthalten, so ist es klar, dass die Punkte stets in dieser Ebene verbleiben müssen welche hier mit der unveränderlichen Ebene zusammenfällt. Mit einer gewissen Annäherung ist dieser Fall in unserem Sonnensystem verwirklicht.

Wenn $C_1' = C_2' = C_3' = 0$ ist, so kann man jede Ebene als unveränderliche annehmen. Dies würde z. B. eintreten, wenn in einem Moment sämtliche Punkte in Ruhe wären, oder sich in einer geraden Linie befänden und sich in dieser bewegten.

Da die Astronomen die Bewegungen in unserem Sonnensystem nicht auf den Schwerpunkt, sondern auf den Mittelpunkt der Sonne zu beziehen pflegen, so wollen wir im Folgenden noch die Modificationen entwickeln, welche durch die Annahme des beweglichen Sonnenmittelpunktes als Anfangspunkt des Coordinatensystems bedingt werden. Die GAUSS'sche k Constante sei $= 1$.

Es seien m_1 die Masse des ersten Planeten und x_1, y_1, z_1 seine Coordinaten in Bezug auf die Sonne, x_1', y_1', z_1' dagegen in Bezug auf den gemeinsamen Schwerpunkt des Sonnensystems u. s. w. Ferner seien ξ, η, ζ die Coordinaten der Sonne in Bezug auf denselben Punkt und M ihre Masse. Das Potential V' hat hier den Werth:

$$V' = M \cdot \sum \frac{m_\lambda}{\sqrt{(x_\lambda' - \xi)^2 + (y_\lambda' - \eta)^2 + (z_\lambda' - \zeta)^2}} \\ + \sum \frac{m_\lambda m_\mu}{\sqrt{(x_\lambda' - x_\mu')^2 + (y_\lambda' - y_\mu')^2 + (z_\lambda' - z_\mu')^2}}.$$

Die Bewegungsgleichungen werden also:

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= \frac{\partial V'}{\partial \xi}, & m_1 \frac{d^2 x_1'}{dt^2} &= \frac{\partial V'}{\partial x_1'} & \dots \dots \dots \\ M \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= \frac{\partial V'}{\partial \eta}, & m_1 \frac{d^2 y_1'}{dt^2} &= \frac{\partial V'}{\partial y_1'} & \dots \dots \dots \\ M \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= \frac{\partial V'}{\partial \zeta}, & m_1 \frac{d^2 z_1'}{dt^2} &= \frac{\partial V'}{\partial z_1'} & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Nun ist:

$$27) \quad x_1 = x_1' - \xi, \quad y_1 = y_1' - \eta, \quad z_1 = z_1' - \zeta \quad \text{u. s. w.}$$

Setzt man daher:

$$V = \sum \frac{m_\lambda \cdot m_\mu}{\sqrt{(x_\lambda' - x_\mu')^2 + (y_\lambda' - y_\mu')^2 + (z_\lambda' - z_\mu')^2}} \\ = \sum \frac{m_\lambda \cdot m_\mu}{\sqrt{(x_\lambda - x_\mu)^2 + (y_\lambda - y_\mu)^2 + (z_\lambda - z_\mu)^2}},$$

$$\sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2 + z_\lambda^2} = r_\lambda,$$

$$M + m_\lambda = \mu_\lambda,$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= \frac{d^2 x_1'}{dt^2} - \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -\mu_1 \frac{x_1}{r_1^3} + \frac{1}{m_1} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ &\quad - m_2 \frac{x_2}{r_2^3} - m_3 \frac{x_3}{r_3^3} \dots \dots \dots \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Führt man endlich noch die Bezeichnung ein:

$$R_\lambda = \frac{1}{m_\lambda} \cdot V - m_1 \frac{x_\lambda x_1 + y_\lambda y_1 + z_\lambda z_1}{r_1^3} - m_2 \frac{x_\lambda x_2 + y_\lambda y_2 + z_\lambda z_2}{r_2^3} \dots$$

$$= \frac{1}{m_\lambda} V - \sum_{\mu} m_\mu \cdot \frac{x_\lambda x_\mu + y_\lambda y_\mu + z_\lambda z_\mu}{r_\mu^3},$$

wo μ alle Werthe, nur nicht λ erhalten darf, so gehen die Gleichungen der Bewegung über in:

$$28) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{\mu_1 x_1}{r_1^3} + \frac{\partial R_1}{\partial x_1}, & \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{\mu_2 x_2}{r_2^3} + \frac{\partial R_2}{\partial x_2} \dots \\ \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -\frac{\mu_1 y_1}{r_1^3} + \frac{\partial R_1}{\partial y_1}, & \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -\frac{\mu_2 y_2}{r_2^3} + \frac{\partial R_2}{\partial y_2} \dots \\ \frac{d^2 z_1}{dt^2} = -\frac{\mu_1 z_1}{r_1^3} + \frac{\partial R_1}{\partial z_1}, & \frac{d^2 z_2}{dt^2} = -\frac{\mu_2 z_2}{r_2^3} + \frac{\partial R_2}{\partial z_2} \dots \end{array} \right.$$

Man nennt die Grössen $R_1, R_2 \dots$ aus später hervortretenden Gründen Störungsfunctionen und hängen diese also nur von den Massen der Planeten, ihren gegenseitigen Entfernungen und ihren Abständen von der Sonne ab. Nachdem aus 27) x_1, y_1, z_1 u. s. w. bestimmt sind, findet man ξ, η, ζ durch die Gleichung:

$$M\xi + \Sigma m x' = M\xi + \Sigma m(x + \xi) = 0,$$

folglich:

$$29) \left\{ \begin{array}{l} \xi = -\frac{\Sigma m x}{M + \Sigma m}, \\ \text{und ebenso:} \\ \eta = -\frac{\Sigma m y}{M + \Sigma m}, \\ \zeta = -\frac{\Sigma m z}{M + \Sigma m}, \\ \text{und daher:} \\ x_1' = x_1 - \frac{\Sigma m x}{M + \Sigma m}, \\ y_1' = y_1 - \frac{\Sigma m y}{M + \Sigma m}, \\ z_1' = z_1 - \frac{\Sigma m z}{M + \Sigma m}, \\ \text{u. s. w.} \end{array} \right.$$

Die Integralgleichungen 16) und 17) nehmen auch etwas andere Gestalten an, nämlich:

$$30) \left\{ \begin{array}{l} \sum m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) \\ + k \left(\sum m y \sum m \frac{dz}{dt} - \sum m z \sum m \frac{dy}{dt} \right) = C_1' \\ \sum m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) \\ + k \left(\sum m z \sum m \frac{dx}{dt} - \sum m x \sum m \frac{dz}{dt} \right) = C_2' \\ \sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \\ + k \left(\sum m x \sum m \frac{dy}{dt} - \sum m y \sum m \frac{dx}{dt} \right) = C_3' \end{array} \right\} k = \frac{-1}{M + \sum m},$$

$$\text{und:} \quad \sum \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] \\ + \frac{k}{2} \left[\left(\sum m \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\sum m \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\sum m \frac{dz}{dt} \right)^2 \right] - V' = C'.$$

§ 7.

Das Problem der drei Körper.

Für die folgenden Untersuchungen wollen wir nur drei Körper voraussetzen, nicht etwa, weil die zu entwickelnden Principien für eine grössere Anzahl eine Ausdehnung erfahren müssen, sondern weil die Formeln unter diesen Beschränkungen eine ausserordentliche Symmetrie gewinnen.

Dass dieselben keine neuen Integrale darstellen können, ist in den vorigen Paragraphen bereits ausgesprochen worden; sie sollen zeigen, wie man durch eine geschickte und elegante Benutzung der bereits gefundenen Integrale das Problem bedeutend vereinfachen kann, besonders, wenn man es auf den vom Coordinatensystem unabhängigen Theil zurückführt, welchen HESSE das reducirte Problem der drei Körper nennt.

Das System der neun Differentialgleichungen lautet hier:

$$1) \quad m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z_i}, \quad (i = 1, 2, 3),$$

wobei:

$$2) \quad V = \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 \cdot m_3}{r_{23}} + \frac{m_3 \cdot m_1}{r_{31}} \quad \text{und:}$$

$$3) \quad r_{\lambda\mu} = \sqrt{(x_\lambda - x_\mu)^2 + (y_\lambda - y_\mu)^2 + (z_\lambda - z_\mu)^2}.$$

Dieses System ist ein simultanes und erfordert zu seiner Lösung 18 Integrationen, von denen 10 bereits geleistet worden sind, nämlich sechs durch das Gesetz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes, drei durch die Flächensätze und eine durch das Gesetz von der Erhaltung der Kraft. Von diesen Errungenschaften aber abgesehen, kann man dieses System auf ein solches zurückführen, welches nur zwei Veränderliche enthält, z. B. eine Coordinate x_i und die Zeit t .

Differentiirt man die erste der Gleichungen 1) noch einmal nach t , so erhält man:

$$4) \quad m_i \frac{d^3 x_i}{dt^3} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_1} \cdot u_1 + \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial y_1} \cdot v_1 + \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial z_1} \cdot w_1 \\ + \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_2} \cdot u_2 + \dots \dots \dots \\ + \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_3} \cdot u_3 + \dots \dots \dots$$

$$\text{wobei:} \quad u_i = \frac{dx_i}{dt}, \quad v_i = \frac{dy_i}{dt}, \quad w_i = \frac{dz_i}{dt},$$

$$\text{also:} \quad \frac{du_i}{dt} = \frac{d^2 x_i}{dt^2} \dots \dots \dots$$

gesetzt wird.

Die rechte Seite von 4) ist mithin eine Function der Coordinaten und ihrer ersten Differentialquotienten. Differentiirt man 4) noch einmal nach t und unterdrückt dann mittelst der Gleichungen 1) die auftretenden zweiten Differentialquotienten, so wird auch $\frac{d^4 x_i}{dt^4}$ als eine Function der Coordinaten und ihrer ersten Differentialquotienten dargestellt und es ist klar, dass man allgemein ebenso auch $\frac{d^k x_i}{dt^k}$ darstellen kann. Richtet man sein Augenmerk nur auf x_i , $\frac{dx_i}{dt}$, $\frac{d^2 x_i}{dt^2}$, $\frac{d^3 x_i}{dt^3}$ u. s. w., so sind in diesen Gleichungen nur 16 Elemente, nämlich die übrigen 8 Coordinaten und ihre ersten Differentialquotienten, welche störend einwirken und müssen daher, um dieselben zu eliminiren, 17 Gleichungen vorhanden sein. Der einzuschlagende Weg ist mithin der, dass man die Grössen $\frac{d^2 x_i}{dt^2}$, $\frac{d^3 x_i}{dt^3}$, $\dots$ $\frac{d^{18} x_i}{dt^{18}}$ als Functionen der 9 Coordinaten und ihrer ersten Differentialquotienten ausdrückt und aus den entstehenden 17 Gleichungen die acht übrigen

Coordinationen mit ihren Differentialquotienten eliminirt. Das Endresultat ist dann eine Gleichung von der Form:

$$5) \quad f\left(x_i, \frac{dx_i}{dt}, \frac{d^2x_i}{dt^2}, \dots \dots \frac{d^{18}x_i}{dt^{18}}\right) = 0.$$

also eine Differentialgleichung 18^{ter} Ordnung zwischen den x_i und t .

Hat man die Gleichung 5) vollständig integrirt, so wird das Problem auf eine reine Elimination zurückgeführt. Denn die obigen Ausdrücke für $\frac{d^2x_i}{dt^2} \dots \frac{d^{18}x_i}{dt^{18}}$ sind dann mehr als hinreichend, um die übrigen Coordinationen und deren Differentialquotienten zu berechnen.

Anstatt einer Coordinate kann man irgend eine Function sämtlicher Coordinationen und ihrer ersten Differentialquotienten wählen, und wird im Allgemeinen stets zu einer Differentialgleichung 18^{ter} Ordnung zwischen der Function und der Zeit gelangen. Indessen kann in speciellen Fällen schon eine niedrigere Differentialgleichung vorhanden sein. Es kann sogar der Fall sein, dass dieselbe von der ersten Ordnung wird und die einfache Form annimmt:

$$\frac{d\phi}{dt} = 0.$$

und ist dies stets der Fall, wenn ϕ ein Integral des Systems ist.

Im Allgemeinen wird man also durch Elimination aller Variablen ausser zweien und ebenso durch Elimination von weniger Variablen nichts gewinnen, da in dem Maasse, als die Elimination fortschreitet und mithin die Anzahl der Differentialgleichungen verringert wird, die Ordnung derselben steigt.

Indessen haben die Gleichungen 1), da sie von der Wahl des Coordinatensystems unabhängig sind, die zum ersten Male von LAGRANGE in seiner berühmten Abhandlung: „Sur le problème des trois corps“ vollständig erkannte Eigenschaft, dass man ein specielles System von Unbekannten angeben kann, welches von vornherein nur neun Integrationen erfordert, also neun Integrationen weniger, als das System 1). Diese Unbekannten müssen so gewählt werden, dass sie nur von den Entfernungen der Körper unter sich abhängen und hier wird man am einfachsten diese drei Entfernungen r_{12} , r_{23} und r_{31} selbst wählen. Das so entstandene Problem ist von HESSE das reducirte Drei-Körper-Problem genannt worden.

Diese Reduction hat aber, ganz abgesehen davon, dass durch sie der Grad des Systems um neun Einheiten reducirt wird, noch einen tieferen Grund. Denn in der That kann man bei einem irgend wie

bewegten System von Punkten, wenn man keine Hypothese zulassen will, nur Veränderungen in den Entfernungen und in den Winkeln nachweisen. Die letzteren sind aber stets durch die ersteren ausdrückbar. Somit ist klar, dass unsere, von jeder Voraussetzung unabhängige, also wirkliche Kenntniss von den Bewegungen im Raume niemals über die Kenntniss des reducirten Problems hinauskommen kann. Dieses letztere ist mithin derjenige Rückstand, welcher bleibt, wenn man von denjenigen Gesetzen, welche über die Bewegungen der Körper aufgestellt werden und welche ein Resultat der Beobachtungen und von Hypothesen sind, diese letzteren abzieht, mögen sie noch so einfach und glaubhaft sein.

So würde z. B. die Beobachtung der Sonne und ihrer Planeten allein uns niemals das NEWTON'sche Gravitationsgesetz enthüllt haben, selbst wenn man wirklich im Stande wäre, ihre Entfernungen direct zu messen. Erst das System der Fixsterne ergiebt unter der Voraussetzung, dass dasselbe von uns unendlich weit entfernt ist und in Ruhe sich befindet, Aufschluss über die wirklichen Richtungsveränderungen der Entfernungen. Dagegen ist der Satz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes unseres Sonnensystems unzweifelhaft eine sich auf keine einzige Beobachtung stützende Hypothese, welche NEWTON aus dem Princip der Action und Reaction geschöpft hat, einem Princip, dessen Giltigkeit aus philosophischen und anderen Gründen sehr wahrscheinlich sein mag, dessen strenger Beweis aber nicht möglich ist.

Das reducirte Problem für zwei Körper besteht nach § 1, 16), in der Differentialgleichung:

$$6) \quad \frac{d^2 \left(r \frac{dr}{dt} \right)}{dt^2} = - \mu \cdot \frac{r \cdot \frac{dr}{dt}}{r^3},$$

welche von der 3^{ten} Ordnung ist, während das allgemeine Problem zwölf Integrationen erfordert. Es handelt sich jetzt darum, für drei Körper die der Gleichung 6) entsprechenden Gleichungen zu bilden. Dies ist LAGRANGE auf die eleganteste Art gelungen und um dieselbe zu begründen, wollen wir zunächst ein allgemeines Verfahren herleiten, welches in allen Fällen das reducirte Problem ergeben muss. Führt man in 1) ein neues ruhendes Coordinatensystem durch die Transformationsformeln ein:

$$7) \quad \begin{cases} x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' + a \\ y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' + b \\ z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' + c, \end{cases}$$

so bleiben die Formeln 1) bestehen, wenn man die gestrichelten Buchstaben einführt. Die 12 Substitutionscoefficienten von 7) hängen von 6 willkürlichen Constanten ab. Die Gleichungen 1) bleiben in der neuen Form aber noch bestehen, wenn man annimmt, dass a , b und c lineare ganze Functionen der Zeit, also von der Form $p + p_1 t$, $q + q_1 t$, $r + r_1 t$ sind. Mithin würden in 7) 9 willkürliche Constante stecken, welche aus den Endausdrücken r_{12} , r_{23} , r_{31} sämmtlich verschwinden. Es folgt hieraus, dass in diese Endausdrücke nur noch 9 willkürliche, von einander unabhängige Constante eingehen und somit das Problem der Entfernungen nur von der 9^{ten} Ordnung werden kann.

Um dieses Problem aufzustellen, schlagen wir folgenden eigenthümlichen Weg ein. Denkt man sich in 7) die Coefficienten nicht constant, sondern als irgend welche beliebig gegebene Functionen der Zeit, die den bekannten Bedingungen der orthogonalen Substitution entsprechen, so bleiben trotzdem r_{12} , r_{23} , r_{31} bei dieser Substitution unverändert und mithin auch die zwischen ihnen giltigen Differentialgleichungen. Und es folgt umgekehrt, dass wenn man in 1) die Substitutionen 8) unter der Voraussetzung eines irgend wie bewegten Coordinatensystems macht und aus den neuen Differentialgleichungen durch Differentiation und Elimination die Coefficienten von 7) wegschafft, man zu Gleichungen gelangen muss, welche nur von dem reducirten Problem, d. h. von den Entfernungen und ihren Differentialquotienten nach der Zeit abhängen.

Das Verfahren, welches wir einschlagen werden, besteht also darin, dass in 1) die Substitutionen 7) gemacht werden unter der Voraussetzung eines irgend wie bewegten Coordinatensystems, dass die Substitutionscoefficienten dann eliminirt werden und zwar so lange, bis man eine hinreichende Anzahl von Differentialgleichungen erlangt hat.

Die Coefficienten a , b , c kann man sofort eliminiren, wenn man in 1) je zwei entsprechende Gleichungen abzieht.

Setzt man:

$$8) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = \xi_3, & x_2 - x_3 = \xi_1, & x_3 - x_1 = \xi_2 \\ y_1 - y_2 = \eta_3, & y_2 - y_3 = \eta_1, & y_3 - y_1 = \eta_2 \\ z_1 - z_2 = \zeta_3, & z_2 - z_3 = \zeta_1, & z_3 - z_1 = \zeta_2, \end{cases}$$

so ergibt sich:

$$\frac{d^2 \xi_1}{dt^2} = \frac{d^2 x_2}{dt^2} - \frac{d^2 x_3}{dt^2} = \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 V}{\partial x_2} - \frac{1}{m_3} \frac{\partial^2 V}{\partial x_3},$$

oder da:

$$9) \quad V = \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_3 m_1}{r_{31}}$$

$$\frac{1}{m_2} \frac{\partial V}{\partial x_2} = \frac{m_1 \cdot \xi_3}{r_{12}^3} - \frac{m_3 \cdot \xi_1}{r_{23}^3}, \quad \frac{1}{m_3} \frac{\partial V}{\partial x_3} = \frac{m_2 \cdot \xi_1}{r_{23}^3} - \frac{m_1 \cdot \xi_2}{r_{31}^3},$$

wenn noch gesetzt wird:

$$10) \quad m_1 + m_2 + m_3 = M,$$

$$11) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} = m_1 \left(\frac{\xi_1}{r_{23}^3} + \frac{\xi_2}{r_{31}^3} + \frac{\xi_3}{r_{12}^3} \right) - M \cdot \frac{\xi_1}{r_{23}^3} \\ \frac{d^2 \xi_2}{dt^2} = m_2 \left(\frac{\xi_1}{r_{23}^3} + \frac{\xi_2}{r_{31}^3} + \frac{\xi_3}{r_{12}^3} \right) - M \cdot \frac{\xi_2}{r_{31}^3} \\ \frac{d^2 \xi_3}{dt^2} = m_3 \left(\frac{\xi_1}{r_{23}^3} + \frac{\xi_2}{r_{31}^3} + \frac{\xi_3}{r_{12}^3} \right) - M \cdot \frac{\xi_3}{r_{12}^3}, \end{cases}$$

und ebenso die entsprechenden, welche man aus 11) durch Vertauschung von ξ mit η und ζ erhält.

Die Gleichung 11) und ihre 6 Analogen sind nicht unabhängig, da die Formeln 8) die identischen Gleichungen liefern:

$$12) \quad \begin{cases} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0 \\ \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 0. \end{cases}$$

Der Symmetrie wegen werden aber alle neun beibehalten werden.

Die Transformationsformeln 7) ergeben:

$$13) \quad \begin{cases} \xi = \alpha_1 \xi' + \alpha_2 \eta' + \alpha_3 \zeta', & \xi' = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta, \\ \eta = \beta_1 \xi' + \beta_2 \eta' + \beta_3 \zeta', & \eta' = \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2 \zeta, \\ \zeta = \gamma_1 \xi' + \gamma_2 \eta' + \gamma_3 \zeta', & \zeta' = \alpha_3 \xi + \beta_3 \eta + \gamma_3 \zeta, \end{cases}$$

und hieraus:

$$14) \quad d\xi = \alpha_1 d\xi' + \alpha_2 d\eta' + \alpha_3 d\zeta' + d\alpha_1 \xi' + d\alpha_2 \eta' + d\alpha_3 \zeta'$$

u. s. w.

Die EULER'schen Drehcomponenten λ, μ, ν (welche der Leser selbstverständlich nicht mit den Indices λ, μ verwechseln wird):

$$15) \quad \begin{cases} \alpha_2 d\alpha_3 + \beta_2 d\beta_3 + \gamma_2 d\gamma_3 = -(\alpha_3 d\alpha_2 + \beta_3 d\beta_2 + \gamma_3 d\gamma_2) = \lambda \\ \alpha_3 d\alpha_1 + \beta_3 d\beta_1 + \gamma_3 d\gamma_1 = -(\alpha_1 d\alpha_3 + \beta_1 d\beta_3 + \gamma_1 d\gamma_3) = \mu \\ \alpha_1 d\alpha_2 + \beta_1 d\beta_2 + \gamma_1 d\gamma_2 = -(\alpha_2 d\alpha_1 + \beta_2 d\beta_1 + \gamma_2 d\gamma_1) = \nu, \end{cases}$$

ergeben bei Benutzung der Gleichungen:

$$16) \quad \begin{cases} \alpha_1 d\alpha_1 + \beta_1 d\beta_1 + \gamma_1 d\gamma_1 = 0 \\ \alpha_2 d\alpha_2 + \beta_2 d\beta_2 + \gamma_2 d\gamma_2 = 0 \\ \alpha_3 d\alpha_3 + \beta_3 d\beta_3 + \gamma_3 d\gamma_3 = 0 \end{cases}$$

die Differentialquotienten der neun Richtungscosinus, nämlich:

$$17) \begin{cases} d\alpha_1 = \alpha_3 \mu - \alpha_2 \nu, & d\beta_1 = \beta_3 \mu - \beta_2 \nu, & d\gamma_1 = \gamma_3 \mu - \gamma_2 \nu, \\ d\alpha_2 = \alpha_1 \nu - \alpha_3 \lambda, & d\beta_2 = \beta_1 \nu - \beta_3 \lambda, & d\gamma_2 = \gamma_1 \nu - \gamma_3 \lambda, \\ d\alpha_3 = \alpha_2 \lambda - \alpha_1 \mu, & d\beta_3 = \beta_2 \lambda - \beta_1 \mu, & d\gamma_3 = \gamma_2 \lambda - \gamma_1 \mu. \end{cases}$$

Multipliziert man die Gleichungen 13) der Reihe nach erst mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, dann mit $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, endlich mit $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ und addiert, so ergibt sich unter Einführung der Abkürzungen:

$$18) \begin{cases} d\xi' + \nu\eta' - \mu\zeta' = [d\xi'] \\ d\eta' + \lambda\zeta' - \nu\xi' = [d\eta'] \\ d\zeta' + \mu\xi' - \lambda\eta' = [d\zeta'] \end{cases}$$

das System:

$$19) \begin{cases} \alpha_1 d\xi + \beta_1 d\eta + \gamma_1 d\zeta = [d\xi'] \\ \alpha_2 d\xi + \beta_2 d\eta + \gamma_2 d\zeta = [d\eta'] \\ \alpha_3 d\xi + \beta_3 d\eta + \gamma_3 d\zeta = [d\zeta']. \end{cases}$$

Differentiiert man ferner die erste der Gleichungen 19), so kommt:

$$\alpha_1 d^2\xi + \beta_1 d^2\eta + \gamma_1 d^2\zeta = d[d\xi'] - [d\alpha_1 d\xi + d\beta_1 d\eta + d\gamma_1 d\zeta],$$

bildet man die entsprechenden, benutzt dann die Gleichungen 17) und 19), so erhält man, wenn noch analog zu 18) die Bezeichnungen eingeführt werden:

$$20) \begin{cases} d[d\xi'] + \nu[d\eta'] - \mu[d\zeta'] = [d^2\xi'] \\ d[d\eta'] + \lambda[d\zeta'] - \nu[d\xi'] = [d^2\eta'] \\ d[d\zeta'] + \mu[d\xi'] - \lambda[d\eta'] = [d^2\zeta'], \end{cases}$$

$$21) \begin{cases} \alpha_1 d^2\xi + \beta_1 d^2\eta + \gamma_1 d^2\zeta = [d^2\xi'] \\ \alpha_2 d^2\xi + \beta_2 d^2\eta + \gamma_2 d^2\zeta = [d^2\eta'] \\ \alpha_3 d^2\xi + \beta_3 d^2\eta + \gamma_3 d^2\zeta = [d^2\zeta']. \end{cases}$$

Dies in das System 11) eingeführt, ergibt das transformierte System:

$$22) \begin{cases} \frac{[d^2\xi_1']}{dt^2} = m_1 \left(\frac{\xi_1'}{r_{23}^3} + \frac{\xi_2'}{r_{31}^3} + \frac{\xi_3'}{r_{12}^3} \right) - M \frac{\xi_1'}{r_{23}^3} \\ \frac{[d^2\xi_2']}{dt^2} = m_2 \left(\frac{\xi_1'}{r_{23}^3} + \frac{\xi_2'}{r_{31}^3} + \frac{\xi_3'}{r_{12}^3} \right) - M \frac{\xi_2'}{r_{31}^3} \\ \frac{[d^2\xi_3']}{dt^2} = m_3 \left(\frac{\xi_1'}{r_{23}^3} + \frac{\xi_2'}{r_{31}^3} + \frac{\xi_3'}{r_{12}^3} \right) - M \frac{\xi_3'}{r_{12}^3}. \end{cases}$$

Aus diesem folgen 6 andere Gleichungen durch Vertauschung von ξ mit η und ζ . Diese 9 Gleichungen sind offenbar in derselben

Weise von einander abhängig, wie die Gleichungen 11), so dass sie nur sechs unabhängigen Gleichungen äquivalent sind. Die linken Seiten sind hier keine Differentialquotienten, sondern eigenthümliche durch die beiden analogen Algorithmen 18) und 20) abgeleitete Ausdrücke. Sie gehen natürlich auf der Stelle in Differentialquotienten $\frac{d^2 \xi'}{dt^2}$ u. s. w. über, wenn das neue Coordinatensystem ebenfalls ruht, also $\lambda = \mu = \nu = 0$.

Es sollen jetzt der Kürze wegen einige einfache von HESSE aufgestellte Bezeichnungen eingeführt werden, zunächst:

$$23) \quad \xi_\lambda \cdot \xi_\mu + \eta_\lambda \eta_\mu + \zeta_\lambda \zeta_\mu = [\lambda, \mu] = [\mu, \lambda] = \xi'_\lambda \xi'_\mu + \eta'_\lambda \eta'_\mu + \zeta'_\lambda \zeta'_\mu.$$

Die Ausdrücke $[\lambda, \mu]$ lassen sich auf die drei Entfernungen r_{23} , r_{31} , r_{12} zurückführen, denn es ist:

$$24) \quad \begin{cases} [1, 1] = r_{23}^2, & [2, 2] = r_{31}^2, & [3, 3] = r_{12}^2 \\ [1, 2] = [2, 1] = -\frac{1}{2}([1, 1] + [2, 2] - [3, 3]) \\ & = -\frac{1}{2}(r_{23}^2 + r_{31}^2 - r_{12}^2) \\ [2, 3] = [3, 2] = -\frac{1}{2}(-[1, 1] + [2, 2] + [3, 3]) \\ & = -\frac{1}{2}(-r_{23}^2 + r_{31}^2 + r_{12}^2) \\ [3, 1] = [1, 3] = -\frac{1}{2}([1, 1] - [2, 2] + [3, 3]) \\ & = -\frac{1}{2}(r_{23}^2 - r_{31}^2 + r_{12}^2). \end{cases}$$

Es sei weiter:

$$25) \quad \xi_\lambda \cdot \frac{d\xi_\mu}{dt} + \eta_\lambda \frac{d\eta_\mu}{dt} + \zeta_\lambda \frac{d\zeta_\mu}{dt} = [\lambda, \mu'] \\ = \xi'_\lambda \frac{[d\xi'_\mu]}{dt} + \eta'_\lambda \frac{[d\eta'_\mu]}{dt} + \zeta'_\lambda \frac{[d\zeta'_\mu]}{dt}.$$

Setzt man nun:

$$26) \quad [\lambda, \mu'] + [\lambda', \mu] = [\lambda, \mu]',$$

so ist:

$$27) \quad [\lambda, \mu]' = \frac{d[\lambda, \mu]}{dt},$$

und setzt man endlich:

$$28) \quad [\lambda, \mu'] - [\lambda', \mu] = \varrho_{\lambda, \mu},$$

so ist:

$$\varrho_{11} = \varrho_{22} = \varrho_{33} = 0 \quad \text{und}$$

$$29) \quad \varrho_{\lambda, \mu} = -\varrho_{\mu, \lambda}.$$

Aus 26) und 28) folgt sofort:

$$30) \quad [\lambda, \mu]' = \frac{1}{2}([\lambda, \mu]' + \varrho_{\lambda, \mu}).$$

Die $\varrho_{\lambda\mu}$ haben nun die leicht aus den Relationen 12) fließende Eigenschaft, dass sie, wenn λ und μ verschieden sind, vom Vorzeichen abgesehen, sämtlich einander gleich sind. Setzt man also noch:

$$31) \quad \varrho = \varrho_{12} = \varrho_{23} = \varrho_{31} = -\varrho_{21} = -\varrho_{32} = -\varrho_{13},$$

so sind die neun Gleichungen 30) in entwickelter Form geschrieben:

$$32) \quad \begin{cases} [1,1'] = \frac{1}{2}[1,1]', & [1,2'] = \frac{1}{2}([1,2]' + \varrho), & [1,3'] = \frac{1}{2}([1,3]' - \varrho), \\ [2,1'] = \frac{1}{2}([2,1]' - \varrho), & [2,2'] = \frac{1}{2}[2,2]', & [2,3'] = \frac{1}{2}([2,3]' + \varrho), \\ [3,1'] = \frac{1}{2}([3,1]' + \varrho), & [3,2'] = \frac{1}{2}([3,2]' - \varrho), & [3,3'] = \frac{1}{2}[3,3]'. \end{cases}$$

Die Symbole $[\lambda, \mu]'$ sind ebenfalls durch drei von ihnen ausdrückbar, ganz ähnlich wie die Symbole $[\lambda, \mu]$.

Schliesslich sei noch:

$$33) \quad \left\{ \begin{aligned} [\lambda, \mu]'' &= \frac{d^2[\lambda, \mu]}{dt^2}, & [\lambda, \mu]''' &= \frac{d^3[\lambda, \mu]}{dt^3}, \\ [\lambda, \mu''] &= \xi_\lambda \frac{d^2 \xi_\mu}{dt^2} + \eta_\lambda \frac{d^2 \eta_\mu}{dt^2} + \zeta_\lambda \frac{d^2 \zeta_\mu}{dt^2} = \xi_\lambda' \frac{[d^2 \xi_\mu']}{dt^2} + \dots, \\ [\lambda', \mu'] &= \frac{d \xi_\lambda}{dt} \cdot \frac{d \xi_\mu}{dt} + \frac{d \eta_\lambda}{dt} \cdot \frac{d \eta_\mu}{dt} + \frac{d \zeta_\lambda}{dt} \cdot \frac{d \zeta_\mu}{dt} \\ &= \frac{[d \xi_\lambda']}{dt} \cdot \frac{[d \xi_\mu']}{dt} + \dots, \\ [\lambda', \mu''] &= \frac{d \xi_\lambda}{dt} \cdot \frac{d^2 \xi_\mu}{dt^2} + \frac{d \eta_\lambda}{dt} \cdot \frac{d^2 \eta_\mu}{dt^2} + \frac{d \zeta_\lambda}{dt} \cdot \frac{d^2 \zeta_\mu}{dt^2} \\ &= \frac{[d \xi_\lambda']}{dt} \cdot \frac{[d^2 \xi_\mu']}{dt^2} + \dots \end{aligned} \right.$$

Die Bezeichnungen sind so gewählt, dass das Bildungsgesetz bei allen dasselbe ist.

Nach diesen Vorbereitungen kehren wir wieder zu den Gleichungen 22) zurück. In den Symbolen $\frac{[d^2 \xi]}{dt^2}$ u. s. w. sind die Dreh-

componenten λ, μ, ν und ihre Differentialquotienten $\frac{d\lambda}{dt}, \frac{d\mu}{dt}, \frac{d\nu}{dt}$ enthalten. Diese müssen herausgeschafft werden, was nur durch eine nochmalige Differentiation möglich ist. Zunächst wollen wir aber aus 22) Verbindungen herstellen, die wenigstens $\frac{d\lambda}{dt}, \frac{d\mu}{dt}, \frac{d\nu}{dt}$ nicht enthalten. Solche Verbindungen sind:

$$[\lambda, \mu''] + [\mu, \lambda''] = [\lambda, \mu]'' - 2[\lambda' \mu'].$$

Nimmt man der Einfachheit wegen noch $\mu = \lambda$ und setzt in diese Verbindungen die Ausdrücke 22) ein, so erhält man das System:

$$34) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}[1, 1]'' - [1', 1'] = P_1 \\ \frac{1}{2}[2, 2]'' - [2', 2'] = P_2 \\ \frac{1}{2}[3, 3]'' - [3', 3'] = P_3, \end{cases}$$

wo allgemein:

$$35) \quad P_\lambda = m_\lambda \left(\frac{[1, \lambda]}{r_{23}^3} + \frac{[2, \lambda]}{r_{31}^3} + \frac{[3, \lambda]}{r_{12}^3} \right) - M \frac{[\lambda, \lambda]}{r^{3(\lambda+1), (\lambda+2)}},$$

(wo $(\lambda + 1)$, $(\lambda + 2)$ die kleinsten Reste von $\lambda + 1$, $\lambda + 2$ bei der Division durch 3 sind).

Die Gleichungen 34) enthalten die λ , μ , ν nur insofern, als sie implicite in $[1', 1']$, $[2', 2']$, $[3', 3']$ enthalten sind. Durch Differentiation der ersten von ihnen erhält man:

$$36) \quad \frac{1}{2}[1, 1]''' - 2[1', 1''] = \frac{dP_1}{dt}.$$

Es ist (vergl. 20):

$$\begin{aligned} [1', 1''] &= \frac{[d\xi_1']}{dt} \cdot \frac{d\left[\frac{d\xi_1'}{dt}\right]}{dt} + \frac{[d\eta_1']}{dt} \cdot \frac{d\left[\frac{d\eta_1'}{dt}\right]}{dt} + \frac{[d\zeta_1']}{dt} \cdot \frac{d\left[\frac{d\zeta_1'}{dt}\right]}{dt} \\ &= \frac{[d\xi_1']}{dt} \cdot \frac{[d^2\xi_1']}{dt^2} + \frac{[d\eta_1']}{dt} \cdot \frac{[d^2\eta_1']}{dt^2} + \frac{[d\zeta_1']}{dt} \cdot \frac{[d^2\zeta_1']}{dt^2}, \end{aligned}$$

also nach 22) und 25):

$$[1', 1''] = m_1 \left(\frac{[1, 1']}{r_{23}^3} + \frac{[2, 1']}{r_{31}^3} + \frac{[3, 1']}{r_{23}^3} \right) - M \frac{[1, 1']}{r_{23}^3},$$

und endlich nach 32):

$$\begin{aligned} [1', 1''] &= \frac{1}{2} \left[m_1 \left(\frac{[1, 1']}{r_{23}^3} + \frac{[2, 1']}{r_{31}^3} + \frac{[3, 1']}{r_{12}^3} \right) - M \frac{[1, 1']}{r_{23}^3} \right. \\ &\quad \left. + m_1 \varphi \left(\frac{1}{r_{12}^3} - \frac{1}{r_{13}^3} \right) \right]. \end{aligned}$$

Setzt man also noch:

$$37) \quad Q_1 = \frac{dP_1}{dt} + m_1 \left(\frac{[1, 1']}{r_{23}^3} + \frac{[2, 1']}{r_{31}^3} + \frac{[3, 1']}{r_{23}^3} \right) - M \frac{[1, 1']}{r_{23}^3}$$

u. s. w., so gehen 36) und die entsprechenden über in:

$$38) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}[1, 1]''' = Q_1 + m_1 \varrho \left(\frac{1}{r_{12}^3} - \frac{1}{r_{13}^3} \right) \\ \frac{1}{2}[2, 2]''' = Q_2 + m_2 \varrho \left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{21}^3} \right) \\ \frac{1}{2}[3, 3]''' = Q_3 + m_3 \varrho \left(\frac{1}{r_{31}^3} - \frac{1}{r_{32}^3} \right). \end{cases}$$

In diesen Gleichungen sind alle in Betracht kommenden Grössen nur Functionen der Entfernungen und ihrer Differentialquotienten nach der Zeit, mit Ausnahme von ϱ , welches noch die λ, μ, ν implicite enthält. Durch Elimination von ϱ aus 38) erhält man ohne Weiteres zwei der gesuchten Differentialgleichungen. Dieselben sind:

$$39) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{[1, 1]'''}{m_1} + \frac{[2, 2]'''}{m_2} + \frac{[3, 3]'''}{m_3} \right) = \frac{Q_1}{m_1} + \frac{Q_2}{m_2} + \frac{Q_3}{m_3}$$

$$40) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{[1, 1]'''}{m_1 r_{23}^3} + \frac{[2, 2]'''}{m_2 r_{31}^3} + \frac{[3, 3]'''}{m_3 r_{12}^3} \right) = \frac{Q_1}{m_1 r_{23}^3} + \frac{Q_2}{m_2 r_{31}^3} + \frac{Q_3}{m_3 r_{12}^3}$$

Die Gleichung 39) ist sofort integrabel, denn ihre rechte Seite ist nach 37) und 35):

$$\begin{aligned} &= -M \left(\frac{d\left(\frac{[1, 1]}{r_{23}^3}\right)}{m_1 dt} + \frac{[1, 1]'}{m_1 r_{23}^3} + \dots \right) \\ &= -M \left(\frac{d\left(\frac{(r_{23})^2}{r_{23}^3}\right)}{m_1 dt} + 2 \frac{r_{23} \frac{dr_{23}}{dt}}{m_1 r_{23}^3} + \dots \right) \\ &= \frac{d}{dt} M \left(\frac{1}{r_{23} m_1} + \frac{1}{r_{13} m_1} + \frac{1}{r_{12} m_3} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{M}{m_1 m_2 m_3} \cdot V \right). \end{aligned}$$

Die Integralgleichung von 39) ist demnach:

$$41) \quad \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (m_2 m_3 r_{23}^2 + m_3 m_1 r_{31}^2 + m_1 m_2 r_{12}^2) = MV + C,$$

also Gleichung 21), § 6.

Schwieriger ist die Aufstellung der dritten Differentialgleichung. Man hat dazu aus ϱ und den Symbolen $[1', 1']$, $[2', 2']$, $[3', 3']$ die

drei Drehungscomponenten λ, μ, ν zu eliminiren, was am einfachsten durch die Bildung des Quadrates einer gewissen identisch verschwindenden Determinante, nämlich:

$$\begin{vmatrix} \xi_1', & \eta_1', & \zeta_1', & 0 \\ \xi_2', & \eta_2', & \zeta_2', & 0 \\ \frac{[d\xi_1']}{dt}, & \frac{[d\eta_1']}{dt}, & \frac{[d\zeta_1']}{dt}, & 0 \\ \frac{[d\xi_2']}{dt}, & \frac{[d\eta_2']}{dt}, & \frac{[d\zeta_2']}{dt}, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

geschieht, wenn man die Horizontalreihen combinirt. Dieses Quadrat ist:

$$\begin{vmatrix} [1, 1], & [1, 2], & [1, 1'], & [1, 2'] \\ [1, 2], & [2, 2], & [2, 1'], & [2, 2'] \\ [1, 1'], & [2, 1'], & [1', 1'], & [2', 1'] \\ [1, 2'], & [2, 2'], & [1', 2'], & [2', 2'] \end{vmatrix} = 0.$$

Mit Hilfe von 32) und 34) wird diese Determinante umgewandelt in:

$$42) \begin{vmatrix} [1, 1] & , & [2, 1] & , & \frac{1}{2}[1, 1]' & , & \frac{1}{2}([2, 1]' + \rho) \\ [1, 2] & , & [2, 2] & , & \frac{1}{2}([1, 2]' - \rho) & , & \frac{1}{2}[2, 2]' \\ \frac{1}{2}[1, 1]' & , & \frac{1}{2}([2, 1]' - \rho) & , & \frac{1}{2}[1, 1]'' - P_1 & , & \frac{1}{2}[2, 1]'' + \frac{P_1 + P_2 - P_3}{2} \\ \frac{1}{2}([1, 2]' + \rho) & , & \frac{1}{2}[2, 2]' & , & \frac{1}{2}[1, 2]'' + \frac{P_1 + P_2 - P_3}{2} & , & \frac{1}{2}[2, 2]'' - P_2. \end{vmatrix}$$

Aus dieser zuerst von LAGRANGE aufgestellten Gleichung vom vierten Grade ist ρ zu berechnen. Sie enthält nur die geraden Potenzen von ρ und nimmt demnach entwickelt die Gestalt an:

$$43) \quad \rho^4 + A\rho^2 + B = 0,$$

in welcher A und B nur Functionen der Entfernungen und ihrer ersten und zweiten Differentialquotienten nach der Zeit sind. Aus 43) folgt:

$$44) \quad \rho = \sqrt{-\frac{A}{2}} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in eine der Gleichungen 38) ein, so erhält man die dritte noch fehlende Differentialgleichung und hat also die Reduction des Problems zu Ende geführt.

Trotzdem hiermit die Aufgabe vollständig gelöst ist, wollen wir doch noch auf eine höchst merkwürdige Thatsache aufmerksam machen, welche, so viel dem Verfasser bekannt ist, noch keine ge-

nügende Erklärung gefunden hat. Differentiirt man nämlich den Ausdruck für ϱ in 44), so erhält man $\frac{d\varrho}{dt}$ durch die Entfernungen und ihre Differentialquotienten bis zur dritten Ordnung incl. ausgedrückt. Durch Differentiation des Ausdruckes 28) für ϱ und Anwendung der Gleichungen 22) folgt aber sofort ein Ausdruck für $\frac{d\varrho}{dt}$, der nur die Entfernungen selbst enthält. Denn es ist:

$$\varrho = \varrho_{12} = [1, 2'] - [1', 2]$$

$$\frac{d\varrho}{dt} = [1, 2''] - [1'', 2]$$

$$= m_2 \left(\frac{[1, 1]}{r_{23}^3} + \frac{[1, 2]}{r_{31}^3} + \frac{[1, 3]}{r_{12}^3} \right) - M \frac{[1, 2]}{r_{31}^3} \\ - m_1 \left(\frac{[2, 1]}{r_{23}^3} + \frac{[2, 2]}{r_{31}^3} + \frac{[2, 3]}{r_{12}^3} \right) + M \frac{[2, 1]}{r_{23}^3},$$

oder:

$$45) \quad \frac{d\varrho}{dt} = [2, 3] m_1 \left(\frac{1}{r_{31}^3} - \frac{1}{r_{21}^3} \right) + [3, 1] m_2 \left(\frac{1}{r_{12}^3} - \frac{1}{r_{32}^3} \right) \\ + [1, 2] m_3 \left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3} \right).$$

Man kann nun die Gleichungen 38) und 45) zusammen als ein System von der 10^{ten} Ordnung mit der unabhängigen Variablen t und den abhängigen r_{12} , r_{23} , r_{31} und ϱ ansehen. Dann muss 43) ein Integral dieses Systems und zwar ein partikuläres oder singuläres Integral sein, weil es keine willkürliche Constante enthält. Doch hat man bis jetzt dieses Integral nicht direct aus 38) und 45) ableiten können. Führt man in 45) für ϱ seinen Werth 44) ein, so ergibt sich noch eine Differentialgleichung dritter Ordnung zwischen den drei Entfernungen, die offenbar auf eine Combination der drei früheren herauskommen muss, wenn es auch nicht leicht sein würde, den analytischen Zusammenhang durch directe Methoden zu entdecken. Der Symmetrie wegen wollen wir diese so behandelte Gleichung 45) als die dritte zu den Gleichungen 39) und 40) hinzutretende Gleichung ansehen, so dass dieselben das verlangte System neunter Ordnung bilden.

Von diesem kennt man ein Integral 41), welches im Grunde genommen den Satz der lebendigen Kraft ausdrückt. Doch giebt es noch ein zweites, welches LAGRANGE zum ersten Male aus den drei Flächensätzen abgeleitet hat. Diese haben hier, wie man sehr leicht beweisen kann, die Form:

$$46) \quad \begin{cases} \frac{(\eta, \zeta)_1}{m_1} + \frac{(\eta, \zeta)_2}{m_2} + \frac{(\eta, \zeta)_3}{m_3} = a, \\ \frac{(\zeta, \xi)_1}{m_1} + \frac{(\zeta, \xi)_2}{m_2} + \frac{(\zeta, \xi)_3}{m_3} = b, \\ \frac{(\xi, \eta)_1}{m_1} + \frac{(\xi, \eta)_2}{m_2} + \frac{(\xi, \eta)_3}{m_3} = c, \end{cases}$$

wobei der Kürze wegen:

$$47) \quad \eta_\lambda \frac{d\zeta_\lambda}{dt} - \zeta_\lambda \frac{d\eta_\lambda}{dt} = (\eta, \zeta)_\lambda$$

u. s. w. gesetzt wird.

Die Combination, welche das neue Integral ergiebt, ist die Summe der Quadrate der Flächenintegrale. Denn man findet:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= \frac{(\eta, \zeta)_1^2 + (\zeta, \xi)_1^2 + (\xi, \eta)_1^2}{m_1^2} \\ &\quad + 2 \frac{(\eta, \zeta)_1 (\eta, \zeta)_2 + (\zeta, \xi)_1 (\zeta, \xi)_2 + (\xi, \eta)_1 (\xi, \eta)_2}{m_1 \cdot m_2} \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

Nun ist nach einem bekannten Determinantensatz:

$$\begin{aligned} (\eta, \zeta)_1^2 + (\zeta, \xi)_1^2 + (\xi, \eta)_1^2 &= [1, 1] \cdot [1', 1'] - [1, 1']^2 \\ &= [1, 1] \left(\frac{1}{2} [1, 1]'' - P_1 \right) - \left(\frac{1}{2} [1, 1]' \right)^2, \\ (\eta, \zeta)_1 \cdot (\eta, \zeta)_2 + \dots &= [1, 2] [1', 2'] - [1, 2'] \cdot [1', 2] \\ &= [1, 2] \left(\frac{1}{2} [1, 2]'' + \frac{P_1 + P_2 - P_3}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} [1, 2]' \right)^2 - \rho^2 \end{aligned}$$

u. s. w.

folglich:

$$\begin{aligned} 48) \quad a^2 + b^2 + c^2 &= \frac{[1, 1] \left(\frac{1}{2} [1, 1]'' - P_1 \right) - \left(\frac{1}{2} [1, 1]' \right)^2}{m_1^2} \\ &\quad + 2 \frac{[1, 2] \left(\frac{1}{2} [1, 2]'' + \frac{P_1 + P_2 - P_3}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} [1, 2]' \right)^2 - \rho^2}{m_1 \cdot m_2} \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

und 48) ist das gesuchte Integral, wenn man für ρ seinen Werth aus 44) entnimmt. Somit ist das System auf die siebente Ordnung reducirt worden und besteht:

1. Aus der Differentialgleichung dritter Ordnung 40),
2. „ „ „ zweiter „ 41),
3. „ „ „ zweiter „ 48).

Eliminirt man endlich noch die Zeit t aus diesen Gleichungen, so wird die Ordnung auf die sechste reducirt und ist diese Reduction die äusserste, welche man bis jetzt überhaupt hat vornehmen können.

Wenn es gelungen ist, das reducirte Problem vollständig zu integrieren, so kann man, wie LAGRANGE in seiner berühmten Abhandlung gezeigt hat, die endgiltige Lösung des ganzen Problems auf eine einzige Quadratur zurückführen.

Multiplicirt man nämlich die Gleichungen 46) der Reihe nach mit ξ_1, η_1, ζ_1 , so erhält man, wenn die linke Seite der durch Addition entstehenden Gleichung in Determinantenform geschrieben wird:

$$49) \quad \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 & \frac{d\xi_2}{m_2 dt} - \frac{d\xi_3}{m_3 dt} \\ \eta_2 & \eta_3 & \frac{d\eta_2}{m_2 dt} - \frac{d\eta_3}{m_3 dt} \\ \zeta_2 & \zeta_3 & \frac{d\zeta_2}{m_2 dt} - \frac{d\zeta_3}{m_3 dt} \end{vmatrix} = a\xi_1 + b\eta_1 + c\zeta_1.$$

Die linke Seite ist aber eine Function, welche nur von den Entfernungen abhängt. Denn erhebt man sie aufs Quadrat, indem man die Verticalreihen componirt, und wendet die früheren Formeln an, so erhält man sofort die gewünschte Form. Ebenso werden die Ausdrücke:

$$a\xi_2 + b\eta_2 + c\zeta_2$$

und:

$$a\xi_3 + b\eta_3 + c\zeta_3$$

bestimmt. Nimmt man als ξ, η Ebene die unveränderliche Ebene, so wird $a = 0$ und $b = 0$ und man erhält aus 49) und den entsprechenden sofort $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, d. h. die Lage der Ebene, in welcher die drei Körper liegen, zur unveränderlichen Ebene.

Um dann noch die sechs übrigen Coordinaten $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ zu erhalten, hat man zunächst die 5 Gleichungen zu benutzen:

$$50) \quad \begin{cases} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0, \\ \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0, \\ \xi_1^2 + \eta_1^2 = r_{23}^2 - \zeta_1^2 = \rho_{23}^2, \\ \xi_2^2 + \eta_2^2 = r_{31}^2 - \zeta_2^2 = \rho_{31}^2, \\ \xi_3^2 + \eta_3^2 = r_{12}^2 - \zeta_3^2 = \rho_{12}^2, \end{cases}$$

und es ist also nur noch eine Relation zwischen ihnen nöthig.

Setzt man:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\eta_1}{\xi_1},$$

so wird:

$$51) \quad d\varphi = \frac{\xi_1 d\eta_1 - \eta_1 d\xi_1}{\xi_1^2 + \eta_1^2} = \frac{\sqrt{(\xi_1^2 + \eta_1^2) \cdot (d\xi_1^2 + d\eta_1^2) - (\xi_1 d\xi_1 + \eta_1 d\eta_1)^2}}{\xi_1^2 + \eta_1^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\rho_{23}^2 (d\xi_1^2 + d\eta_1^2) - \left(\frac{1}{2} \frac{d\rho_{23}}{dt}\right)^2}}{\rho_{23}^2}.$$

Die rechte Seite ist nach dem Vorhergehenden eine bekannte Function von t . 51) ergibt also durch unmittelbare Integration:

$$52) \quad \varphi = \int^t \left(\frac{\sqrt{\rho_{23}^2 (d\xi_1^2 + d\eta_1^2) - \left(\frac{1}{2} \frac{d\rho_{23}}{dt}\right)^2}}{\rho_{23}^2} \right) dt + C_1.$$

Diese Gleichung bestimmt mit den übrigen die noch fehlenden 6 Coordinaten.

Man sieht also, dass das letzte Integral 52) des Problems der drei Körper durch eine blosse Quadratur geleistet wird. Den eigentlichen Grund dafür hat JACOBI in seiner berühmten Abhandlung über das Princip des letzten Multipliers angegeben (Vorlesungen über analytische Mechanik), indem er gezeigt hat, dass das Problem der drei Körper in einen derjenigen Fälle hineingehört, in welchen das Princip des letzten Multipliers unmittelbar anwendbar ist (natürlich unter der Voraussetzung, dass die übrigen bereits bekannt sind).

§ 8.

Specialfälle des Problems der drei Körper.

Wenn auch die im vorigen Paragraphen angegebenen Reductionen die äussersten sind, welche der allgemeine Fall erlaubt, so ist es doch in einigen speciellen Fällen, die im Folgenden namhaft gemacht werden sollen, möglich, noch weiter zu gehen und die Aufgabe entweder auf einen noch niedrigeren Grad herabzudrücken oder selbst vollständig zu lösen.

I. Die Ebene der drei Körper bleibt sich beständig parallel.

In diesem Falle fällt diese Ebene stets mit der unveränderlichen Ebene zusammen. Die rechte Seite der Gleichung 49) des § 7 (und der beiden anderen ihr entsprechenden) ist dann $= 0$, weil sie der Entfernung des ersten Punktes von der unveränderlichen Ebene proportional ist. Die linke Seite, welche demnach identisch verschwinden

muss, ist aber nur von den Entfernungen und ihren Differentialquotienten nach der Zeit abhängig und man gewinnt also drei neue Integrale des reducirten Problems, zwischen denen aber eine identische Gleichung stattfindet. Sie ergeben sich in völlig symmetrischer Gestalt, wenn man die Gleichung 49) und ihre homologen folgendermaassen schreibt:

$$1) \quad \underbrace{\begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 & \frac{d\xi_1}{dt} \\ \eta_2 & \eta_3 & \frac{d\eta_1}{dt} \\ \zeta_2 & \zeta_3 & \frac{d\zeta_1}{dt} \end{vmatrix}}_{m_1} = \underbrace{\begin{vmatrix} \xi_3 & \xi_1 & \frac{d\xi_2}{dt} \\ \eta_3 & \eta_1 & \frac{d\eta_2}{dt} \\ \zeta_3 & \zeta_1 & \frac{d\zeta_2}{dt} \end{vmatrix}}_{m_2} = \underbrace{\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \frac{d\xi_3}{dt} \\ \eta_1 & \eta_2 & \frac{d\eta_3}{dt} \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \frac{d\zeta_3}{dt} \end{vmatrix}}_{m_3}$$

Will man wirklich die Entfernungen bilden, so muss man die Quadrate dieser Determinanten, nachdem man sie durch Composition der Verticalreihen in neue Determinanten verwandelt hat, einander gleich setzen und erhält:

$$2) \quad \underbrace{\begin{vmatrix} [2,2], [2,3], [2,1'] \\ [3,2], [3,3], [3,1'] \\ [2,1'], [3,1'], [1',1'] \end{vmatrix}}_{m_1^2} = \underbrace{\begin{vmatrix} [3,3], [3,1], [3,2'] \\ [1,3], [1,1], [1,2'] \\ [3,2'], [1,2'], [2',2'] \end{vmatrix}}_{m_2^2} = \underbrace{\begin{vmatrix} [1,1], [1,2], [1,3'] \\ [2,1], [2,2], [2,3'] \\ [1,3'], [2,3'], [3',3'] \end{vmatrix}}_{m_3^2}$$

Wir werden bald sehen, dass die drei Ausdrücke 1) resp. 2) = 0 sind.

Man hat hier nach § 7 für die $[\lambda, \mu']$ und $[\lambda', \mu']$ ihre Werthe aus 32) und 34) einzusetzen und für ρ seinen Werth 44) zu nehmen, um zwei neue Integrale des reducirten Problems zu erhalten. Mit Hilfe derselben lässt sich dann die Ordnung von der Zahl 7 auf die Zahl 5 und durch Elimination von t schliesslich auf die Zahl 4 herabdrücken.

Man kann aber zu diesem Resultat auch direct gelangen. Führt man nämlich die Ebene der drei Körper als xy Ebene ein, so werden die $z = 0$ und für die relative Bewegung der Körper wird ein System 8^{ter} Ordnung (bestehend aus 4 Gleichungen 2^{ter} Ordnung) maassgebend. Das reducirte Problem ist um eine Einheit geringer, also von der 7^{ten} Ordnung, weil in ihm die Richtung der Coordinatenachsen keine Rolle spielt. Die Gleichung der lebendigen Kraft und der Flächensatz liefern zwei Integrale, so dass wie oben die 5^{te} und nach Elimination von t die 4^{te} Ordnung bestehen bleibt.

II. Die drei Flächenintegrale sind $= 0$.

Dann sind also $a = b = c = 0$ und die rechte Seite der Gleichungen 49) verschwindet identisch, also auch die linke. Die Gleichungen 1) und 2) bleiben daher genau so wie im ersten Falle bestehen. Dies führt auf die Vermuthung, dass vielleicht auch hier die Ebene der drei Körper sich beständig parallel bleibt und in der That kann man dieselbe auf folgende Weise bestätigen.

Entwickelt man die erste Determinante des Systems 1) nach den Verticalreihen, so wird dieselbe:

$$3) \quad = A \frac{d\xi_1}{dt} + B \frac{d\eta_1}{dt} + C \frac{d\zeta_1}{dt},$$

wo:

$$4) \quad A = \eta_2 \zeta_3 - \eta_3 \zeta_2, \quad B = \zeta_2 \xi_3 - \zeta_3 \xi_2, \quad C = \xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2.$$

Vermöge der Gleichungen 12), § 7, bleiben diese Ausdrücke bei einer cyclischen Vertauschung der Indices 1, 2, 3 unverändert.

Die übrigen Determinanten werden deshalb:

$$5) \quad \begin{cases} = A \frac{d\xi_2}{dt} + B \frac{d\eta_2}{dt} + C \frac{d\zeta_2}{dt} & \text{und} \\ = A \frac{d\xi_3}{dt} + B \frac{d\eta_3}{dt} + C \frac{d\zeta_3}{dt} \end{cases}$$

Bezeichnet man die drei Determinanten von 1) mit p_1, p_2, p_3 , so ist also:

$$\frac{p_1}{m_1} = \frac{p_2}{m_2} = \frac{p_3}{m_3},$$

ferner ist identisch:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0.$$

Nennt man λ den gemeinschaftlichen Werth der vorigen Brüche, so ist:

$$p_1 = \lambda m_1, \quad p_2 = \lambda m_2, \quad p_3 = \lambda m_3$$

und daher:

$$\lambda (m_1 + m_2 + m_3) = 0,$$

also, da $m_1 + m_2 + m_3$ nicht verschwinden kann:

$$6) \quad \lambda = 0, \quad \text{also auch: } p_1 = p_2 = p_3 = 0.$$

Die Grössen A, B, C haben eine sehr einfache geometrische Bedeutung, sie sind gleich dem Doppelten der drei Projectionen des aus den 3 Punkten als Ecken gebildeten Dreiecks, bestimmen also durch ihre Verhältnisse die Stellung dieser Ebene. Die Gleichungen 6) sagen

also aus, dass die relativen Bewegungen der Punkte in dieser Ebene verlaufen und folgt somit der obige Satz.

Der jetzt betrachtete Fall ist also in Fall I enthalten und bietet keine weiteren Reductionen.

III. Die drei Flächenintegrale sind $= 0$ und die Constante der lebendigen Kraft ist $= 0$.

Dann kann man das System 5^{ter} (resp. nach Elimination von t) 4^{ter} Ordnung noch um eine Einheit reduciren. Diese Reduction folgt aus einer Bemerkung von grosser Einfachheit und Wichtigkeit, welche als eine Erweiterung des dritten KEPLER'schen Gesetzes auf das allgemeine Vielkörperproblem angesehen werden kann.

Betrachten wir die Differentialgleichungen dieses Problems in ihrer ursprünglichen Form:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

u. s. w. Die rechte Seite ist eine homogene Function — 2^{ter} Ordnung der Coordinaten. Schreibt man daher statt dieser Coordinaten x_i, y_i, z_i resp. kx_i, ky_i, kz_i , so wird die linke Seite mit k , die rechte mit $\frac{1}{k^2}$ multiplicirt. Um also auf der linken Seite auch den Factor $\frac{1}{k^2}$ herzustellen, muss $t \cdot k^{\frac{3}{2}}$ an Stelle von t geschrieben werden. Dann aber kann man den Factor $\frac{1}{k^2}$ auf beiden Seiten weglassen und kommt auf das ursprüngliche System zurück. Daraus folgt, dass aus einer Lösung x_i, y_i, z_i sofort eine andere kx_i, ky_i, kz_i mit dem constanten Factor k abgeleitet werden kann, wenn $tk^{\frac{3}{2}}$ anstatt t in den Ausdrücken dieser Coordinaten als Functionen von t gesetzt wird.

Man kann sich auch so ausdrücken:

Aus irgend einer Lösung des Problems der n Körper kann durch Vergrösserung resp. Verkleinerung aller linearen Ausdehnungen nach einem constanten Verhältniss eine andere abgeleitet werden. Für solche ähnlichen Systeme stehen die Quadrate der Zeiten, welche für die Bewegungen von entsprechenden Anfangslagen zu entsprechenden Endlagen gebraucht werden im Verhältniss zu den Kuben der linearen Ausdehnungen.

Wenn man von der Lage der Bahnen im Raume und von der Zeit absieht und nur die Lage der Bahnen zu einander ins Auge

fasst, so kann das gegebene System, wie wir gesehen haben, auf die 8^{te} Ordnung reducirt werden, ohne dass eine Integrationsconstante eingeführt wird. Wenn man weiter von den Dimensionen dieser Bahnen absieht und nur noch die Gestalt des aus ihnen gebildeten Systems ins Auge fasst, so wird noch eine willkürliche Grösse (die obige Constante k) eliminirt und die Ordnung um eine Einheit verringert. Während aber zuerst zwei Integrale durch die lebendige Kraft und durch die Summe der Quadrate der Flächen gegeben werden, bestimmen diese beiden Integrale für den zweiten Fall nur eins. Betrachtet man nämlich die beiden Integrationsconstanten als gegebene Zahlen, so müssen dieselben nach der oben angegebenen Substitution mit bestimmten Potenzen von k (der -1^{ten} , resp. $+1^{\text{ten}}$) multiplicirt werden und das Product dieser beiden ist das einzige allgemeine Integral für diesen Fall.

Anders ist es aber, wenn diese beiden Integrationsconstanten $= 0$ sind, denn dann ändern sie sich nicht durch die obige Substitution, sondern bleiben $= 0$. In diesem speciellen Falle wird also das zuletzt angegebene System der 7^{ten} Ordnung noch um 2 Einheiten verringert.

So lange wir uns auf das Gebiet reeller Zahlen beschränken, kann dieser Fall nur eintreten, wenn die drei Flächenintegrale einzeln $= 0$ sind. Dann findet aber eine weitere Reduction um 2 Einheiten statt und sehen wir somit, dass, wenn die drei Flächenintegrale und die Constante der lebendigen Kraft verschwinden, das gegebene System auf die 3^{te} Ordnung reducirt werden kann.

Ich will mich nicht weiter auf diese Reduction, da sie nur einen speciellen Fall betrifft, einlassen, zumal die zu entwickelnden mathematischen Formeln an der Hand der eben gegebenen Auseinandersetzung sofort hingeschrieben werden können.

IV. Die drei Entfernungen der drei Massenpunkte bleiben constant.

Zunächst müssen wir beweisen, ob dies überhaupt möglich ist. Für einen gegebenen Moment können wir annehmen, dass die Entfernungen r_{12} , r_{23} , r_{31} gegebene sind und ihre ersten und zweiten Differentialquotienten nach der Zeit verschwinden. Dann sind auch die Grössen Q in den Differentialgleichungen 38), § 7, für diesen Moment $= 0$ und damit die dritten Differentialquotienten ebenfalls verschwinden, muss sein:

$$\varrho\left(\frac{1}{r_{12}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right) = 0, \quad \varrho\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{21}^3}\right) = 0, \quad \varrho\left(\frac{1}{r_{31}^3} - \frac{1}{r_{32}^3}\right) = 0,$$

also entweder:

$$a) \ r_{12}^3 = r_{23}^3 = r_{31}^3,$$

also, da die drei Entfernungen reell sind:

$$a) \ r_{12} = r_{23} = r_{31}$$

oder:

$$b) \ \varrho = 0.$$

Diese beiden Fälle sind gesondert zu betrachten:

$$a) \ r_{12} = r_{23} = r_{31}.$$

Das aus den drei Punkten als Ecken gebildete Dreieck ist für einen gegebenen Zeitmoment gleichseitig und die ersten und zweiten Differentialquotienten dieser Entfernungen nach der Zeit verschwinden. Unter dieser Voraussetzung verschwinden dann auch die höheren als die dritten Differentialquotienten, d. h. die Entfernungen bleiben constant. Differentiirt man die erste der Gleichungen 38), so ergibt sich:

$$\frac{1}{2}[1,1]'''' = \frac{dQ_1}{dt} + m_1 \frac{d\varrho}{dt} \left(\frac{1}{r_{12}^3} - \frac{1}{r_{13}^3} \right) - m_1 \varrho \left(\frac{3 \frac{dr_{12}}{dt}}{r_{12}^4} - \frac{3 \frac{dr_{13}}{dt}}{r_{13}^4} \right)$$

und die rechte Seite verschwindet, wie man sieht, für den gegebenen Zeitmoment, da in $\frac{dQ_1}{dt}$ ein von den ersten resp. zweiten Differentialquotienten freies Glied nicht zu finden ist. Ebenso kann man zeigen, dass die höheren Differentialquotienten verschwinden.

Nennt man r den gemeinsamen Werth der drei Entfernungen, so ist nach 35):

$$P_1 = P_2 = P_3 = -\frac{M}{r},$$

und 42) geht über in:

$$\begin{vmatrix} r^2, & -\frac{1}{2}r^2, & 0, & -\frac{\varrho}{2} \\ -\frac{1}{2}r^2, & r^2, & +\frac{\varrho}{2}, & 0 \\ 0, & +\frac{\varrho}{2}, & \frac{M}{r}, & -\frac{1}{2}\frac{M}{r} \\ -\frac{\varrho}{2}, & 0, & -\frac{1}{2}\frac{M}{r}, & \frac{M}{r} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{oder:} \quad \left(\frac{\varrho}{2}\right)^4 - \frac{3}{2}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^2 M \cdot r + \frac{9}{16} M^2 r^2 = 0,$$

$$\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}Mr,$$

$$\rho^2 = 3Mr.$$

Die erste Determinante von 2), S. 67, wird hier:

$$\begin{vmatrix} r^2, & -\frac{1}{2}r^2, & -\frac{\rho}{2} \\ -\frac{1}{2}r^2, & r^2, & +\frac{\rho}{2} \\ -\frac{\rho}{2}, & +\frac{\rho}{2}, & -\frac{M}{r} \end{vmatrix} = \frac{3}{4}Mr - \frac{\rho^2}{4} = 0,$$

ebenso verschwinden die übrigen beiden und demnach haben wir den Fall II in einer besonderen Specialität vor uns. Formel 59) giebt für die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich das Dreieck in seiner Ebene dreht:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sqrt{r^2 \cdot \frac{M}{r}}}{r} = \sqrt{\frac{M}{r^3}}.$$

Bezieht man also sämtliche Bewegungen auf den Schwerpunkt, so gehen dieselben so vor sich, als ob das unveränderliche Dreieck der drei Massenpunkte sich in seiner eigenen Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit $\sqrt{\frac{M}{r^3}}$ um den Schwerpunkt dreht.

Und umgekehrt, ordnet man die drei Massenpunkte so, dass sie die drei Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden und giebt jedem von ihnen eine Geschwindigkeit senkrecht zur Verbindungslinie mit dem Schwerpunkt, derartig, dass die drei in der Zeit dt von den drei Verbindungslinien durchlaufenen Winkel gleich und $= \sqrt{\frac{M}{r^3}} \cdot dt$ sind, so rotirt das Dreieck vollkommen so, als ob es ein starres System bildete.

$$b) \quad \rho = 0.$$

Dann ist zunächst nach 45):

$$\begin{aligned} \text{I) } [2,3] m_1 \left(\frac{1}{r_{31}^3} - \frac{1}{r_{21}^3} \right) + [3,1] m_2 \left(\frac{1}{r_{12}^3} - \frac{1}{r_{32}^3} \right) \\ + [1,2] m_3 \left(\frac{2}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3} \right) = 0, \end{aligned}$$

und mit Hilfe dieser Gleichung ergibt sich, dass auch hier die Entfernungen constant bleiben, wenn ihre ersten und zweiten Differentialquotienten nach der Zeit in einem gegebenen Zeitmoment verschwinden.

Aus der Gleichung 42) folgt dann:

$$0 = \begin{vmatrix} [1,1], [2,1] \\ [1,2], [2,2] \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_1, -\frac{1}{2}(P_1 + P_2 - P_3) \\ -\frac{1}{2}(P_1 + P_2 - P_3), P_2 \end{vmatrix}$$

Sie zerfällt in zwei und haben wir also:

$$1) \quad 0 = \begin{vmatrix} [1,1], [2,1] \\ [1,2], [2,2] \end{vmatrix}$$

$$2) \quad 0 = \begin{vmatrix} P_1, -\frac{1}{2}(P_1 + P_2 - P_3) \\ -\frac{1}{2}(P_1 + P_2 - P_3), P_2 \end{vmatrix}$$

Betrachten wir zunächst den Fall 1).

Die Gleichung:

$$0 = \begin{vmatrix} [1,1], [2,1] \\ [1,2], [2,2] \end{vmatrix}$$

verwandelt sich nach den Gleichungen 24), § 7, in:

$$0 = (r_{12} + r_{23} + r_{31})(r_{12} + r_{23} - r_{31})(r_{12} - r_{23} + r_{31})(r_{12} + r_{23} + r_{31}).$$

Die drei Entfernungen sind positiv genommen, es kann also nur einer der drei letzten Factoren verschwinden und sagt die Gleichung aus, dass die grösste Seite des aus ihnen gebildeten Dreiecks gleich der Summe der beiden anderen ist. Es sei r_{23} die grösste von ihnen, so haben wir also:

$$\text{II)} \quad r_{23} = r_{12} + r_{13},$$

und wenn wir nur reelle Bahnen betrachten, so müssen demnach die drei Punkte in einer geraden Linie liegen. Aus I) und II) folgen die Verhältnisse der Entfernungen zu einander.

Bezeichnet man r_{23} , r_{13} , r_{12} mit x_1 , x_2 , x_3 , so ist also:

$$\text{III)} \quad x_1 = x_2 + x_3.$$

Daraus folgt:

$$[2,3] = -\frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2 - x_1^2) = +x_2 x_3$$

$$[3,1] = -\frac{1}{2}(x_3^2 + x_1^2 - x_2^2) = -x_1 x_3$$

$$[1,2] = -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) = -x_1 x_2$$

und I) geht daher, wenn man die Nenner fortschafft, über in:

$$\text{IV)} \quad m_1(x_3^3 - x_2^2)x_1^2 - m_2(x_1^3 - x_3^3)x_2^2 - m_3(x_2^2 - x_1^2)x_3^2 = 0,$$

also in eine Gleichung 5^{ten} Grades, während Gleichung I) im Allgemeinen vom 8^{ten} Grade ist.

Die Bedingungen 2), Seite 67, dieses Paragraphen sind auch erfüllt und mithin besteht die relative Bewegung um den Schwerpunkt oder um irgend einen der gegebenen Punkte in einer Drehung der als starr vorausgesetzten geraden Verbindungslinie der drei Punkte in einer bestimmten Ebene. Die Winkelgeschwindigkeit ist hier nach 59):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sqrt{[1', .1']}}{r_{23}} = \frac{\sqrt{P_1}}{r_{23}},$$

woraus sich übrigens ergibt, dass:

$$\frac{\sqrt{P_1}}{r_{23}} = \frac{\sqrt{P_2}}{r_{31}} = \frac{\sqrt{P_3}}{r_{12}},$$

Gleichungen, die sich bei genauerer Untersuchung als Folgerungen von I) und II) herausstellen.

Betrachten wir ferner den Fall 2).

Die Gleichung:

$$V) \quad 0 = \begin{vmatrix} P_1, & -\frac{1}{2}(P_1 + P_2 - P_3) \\ -\frac{1}{2}(P_1 + P_2 - P_3), & P_2 \end{vmatrix}$$

kann man zunächst in der Gestalt schreiben:

$$\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3} = 0.$$

Die Gleichung V) kann mit Hilfe von I) auf eine sehr elegante Form gebracht werden. Diese Umformung ist nicht leicht und geschieht am einfachsten auf folgende Weise.

Setzt man der Kürze wegen für einen Augenblick:

$$A = u[1,1] + v[1,2] + w[1,3],$$

$$B = u[2,1] + v[2,2] + w[2,3],$$

$$u = \frac{1}{r_{23}^3}, \quad v = \frac{1}{r_{31}^3}, \quad w = \frac{1}{r_{12}^3},$$

dann ist:

$$P_1 = m_1 A - Mu[1,1],$$

$$P_2 = m_2 B - Mv[2,2].$$

Der Ausdruck $-\frac{P_1 + P_2 - P_3}{2}$ kann wegen I) in zwei verschiedenen Formen geschrieben werden, nämlich:

$$-\frac{1}{2}(P_1 + P_2 - P_3) = m_1 B - Mu[1,2],$$

$$-\frac{1}{2}(P_1 + P_2 - P_3) = m_2 A - Mv[1,2],$$

und V) geht daher über in:

$$0 = M^2 uv([1,1][2,2] - [1,2]^2) - M[m_1 v(A[2,2] - B[1,2]) + m_2 u(B[1,1] - A[1,2])].$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} A[2,2] - B[1,2] &= u([1,1][2,2] - [1,2]^2) + w(1,3)[2,2] - [2,3][1,2]) \\ &= (u - w)([1,1][2,2] - [1,2]^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B[1,1] - A[1,2] &= v([1,1][2,2] - [1,2]^2) + w([2,3]1,1] - [1,3][1,2]) \\ &= (v - w)([1,1][2,2] - [1,2]^2), \end{aligned}$$

also:

$$0 = M([1,1][2,2] - [1,2]^2)(m_1 v w + m_2 w u + m_3 u v),$$

oder:

$$0 = M([1,1][2,2] - [1,2]^2)(m_1 r_{23}^3 + m_2 r_{31}^3 + m_3 r_{12}^3).$$

Die Gleichung zerspaltet sich in drei. Der erste und letzte Factor können, so lange nur positive Massen zugelassen werden, nicht verschwinden. Es bleibt also nur noch der mittlere und kommt man dann auf den vorigen Fall, in welchem die drei Punkte in gerader Linie liegen, zurück.

Lässt man im Problem der drei Körper auch negative Massen zu, so können der erste oder der dritte Factor ebenfalls $= 0$ sein. Dann bleibt die Ebene der drei Bahnen nicht stets dieselbe, vielmehr dreht sie sich um eine im Allgemeinen gegen diese Ebene geneigte Achse. Die relativen Bahnen zweier Massenpunkte um den dritten sind dann auch noch Kreise; die Ebenen derselben gehen aber nicht durch diesen dritten Punkt.

Uebrigens möge noch als Anmerkung erwähnt werden, dass der Fall, in welchem die Summe der Massen verschwindet, einen ganz eigenthümlichen Grenzfall des Problems der drei Körper darstellt. Es existirt dann kein Schwerpunkt, die Ausdrücke $\Sigma m x$, $\Sigma m y$, $\Sigma m z$ sind nur von den relativen Coordinaten abhängig, und die sechs Schwerpunktsintegrale müssen daher zur relativen Bewegung gerechnet werden. Sind z. B. nur zwei Körper vorhanden, so ist die relative Bahn des einen zum anderen eine mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufene gerade Linie und die relativen Coordinaten sind lineare Functionen der Zeit. Um die wirklichen Bahnen zu ermitteln, hat man diese Functionen in die ursprünglichen Differentialgleichungen 1), § 1, einzusetzen, worauf dieselben durch unmittelbare Quadraturen zu bestimmen sind. Ein specieller Fall ist der, dass die relativen Coordinaten unveränderlich sind, dann beschreibt jeder Punkt eine Parabel im Raume.

Sind drei Körper gegeben, für welche $m_1 + m_2 + m_3 = 0$, so kann man die Ordnung des reducirten Problems, welche im Allgemeinen, nach Benutzung der Flächenintegrale und des Satzes von der leben-

digen Kraft = 7 ist, um noch zwei Grade herabdrücken, weil die Gleichung 41) sofort integrabel ist und ergibt:

$$m_2 m_3 r_{23}^2 + m_3 m_1 r_{31}^2 + m_1 m_2 r_{12}^2 = Ct^2 + C_1 t + C_2.$$

Allerdings kann man dann durch Elimination der Zeit diesen Grad nicht mehr um eine Einheit vermindern, weil diese in dem eben angegebenen Ausdruck explicite enthalten ist.

V. Die drei Winkel des Körperdreiecks bleiben constant.

Dann können wir setzen:

$$r_{23} = ur_1, \quad r_{31} = ur_2, \quad r_{12} = ur_3,$$

wo r_1, r_2, r_3 constant und allein u variabel ist.

Führt man diese Werthe in die Differentialgleichungen 38) ein, so ergibt sich:

$$r_1^2 \cdot \frac{d^2 \left(u \frac{du}{dt} \right)}{dt^2} = P_1' \cdot \frac{u \cdot \frac{du}{dt}}{u^3} + \varrho \cdot \frac{A_1}{u^3}.$$

Hier ist P_1' das, was aus 35) wird, wenn man r_1, r_2, r_3 an Stelle von r_{23}, r_{31}, r_{12} setzt und

$$\text{VI)} \quad A_1 = \left(\frac{1}{r_3^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) m_1.$$

In ϱ steckt noch u und sein erster und zweiter Differentialquotient, freilich nach 44), § 7, in etwas verwickelter Form. Um eine Gleichung für u zu erhalten, welche nicht ϱ , sondern nur $\frac{d\varrho}{dt}$ enthält, differentiire man die obige Gleichung noch einmal:

$$r_1^2 \cdot \frac{d^3 \left(\frac{u du}{dt} \right)}{dt^3} = P_1' \cdot \frac{d \left(\frac{du}{u^2 dt} \right)}{dt} - 3\varrho \frac{A_1 du}{u^4 dt} + \frac{A_1}{u^3} \cdot \frac{d\varrho}{dt}.$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit $3 \cdot \frac{du}{u dt}$ und addirt sie zur zweiten, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{VII)} \quad r_1^2 \cdot \left(\frac{d^3 \left(\frac{u du}{dt} \right)}{dt^3} + 3u \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{d^2 \left(u \frac{du}{dt} \right)}{dt^2} \right) \\ = P_1' \cdot \left(d \left(\frac{du}{u^2 dt} \right) + 3 \frac{u \frac{du}{dt}}{u^3} \cdot \frac{du}{u dt} \right) + \frac{A_1}{u^4} \cdot \varrho', \end{aligned}$$

wo ρ' aus dem Werth 45) für $\frac{d\rho}{dt}$ erhalten wird, wenn man r_1, r_2, r_3 an Stelle von r_{23}, r_{31}, r_{12} setzt.

Aus VII) kann man zwei ähnliche Differentialgleichungen mit den Coefficienten $r_2^2, P_2', A_2 \rho'$ und $r_3^3, P_3', A_3 \rho'$ bilden. Wenn nun $\frac{du}{dt}$ nicht $= 0$, also die Entfernungen nicht constant sein sollen, so müssen, wie sich leicht beweisen lässt, die Coefficienten dieser Gleichungen in Proportion stehen. Es muss also sein:

$$\text{VIII)} \quad r_1^2 : r_2^2 : r_3^2 = P_1' : P_2' : P_3' = A_1 \rho' : A_2 \rho' : A_3 \rho'.$$

Dies sind vier unabhängige Gleichungen zwischen den drei Grössen r_1, r_2, r_3 und es zeigt sich, dass diese mit einander bestehen können.

Setzt man zunächst das erste System zum dritten proportional und nimmt an, dass ρ' nicht verschwindet, oder, wenn es verschwindet, dennoch:

$$r_1^2 : r_2^2 : r_3^2 = A_1 : A_2 : A_3,$$

so ist auch:

$$r_1^2 : r_2^2 : r_3^3 : \frac{r_1^2}{m_1} + \frac{r_2^2}{m_2} + \frac{r_3^3}{m_3} = A_1 : A_2 : A_3 : \frac{A_1}{m_1} + \frac{A_2}{m_2} + \frac{A_3}{m_3}.$$

Nun ist nach VI):

$$\frac{A_1}{m_1} + \frac{A_2}{m_2} + \frac{A_3}{m_3} = 0.$$

Da nun $\frac{r_1^2}{m_1} + \frac{r_2^2}{m_2} + \frac{r_3^3}{m_3}$ nicht $= 0$ sein kann, so folgt:

$$A_1 = A_2 = A_3 = 0,$$

folglich:

$$\text{IX)} \quad r_1 = r_2 = r_3.$$

Wir wollen diese $= 1$ annehmen, dann wird:

$$r_{12} = r_{23} = r_{31} = u,$$

und das Dreieck ist also wieder ein gleichseitiges.

Die übrigen Bedingungen VIII) sind ebenfalls erfüllt, denn es folgt aus IX):

$$P_1' = P_2' = P_3' = -M.$$

Die Differentialgleichung VII), von der wir ausgegangen, nimmt die Gestalt an:

$$\text{X)} \quad d^2 \frac{u \cdot \frac{du}{dt}}{dt^2} = -M \frac{u \cdot \frac{du}{dt}}{u^3}.$$

Man beweist leicht, dass auch hier die Bewegung in einer Ebene vor sich geht. Die Differentialgleichungen 11) des vorigen Paragraphen gehen hier über in:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi_1}{dt} &= -\frac{M \cdot \xi_1}{(\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2})^3}, \\ \frac{d^2\eta_1}{dt} &= -\frac{M \cdot \eta_1}{(\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2})^3}, \\ \frac{d^2\zeta_1}{dt} &= -\frac{M \cdot \zeta_1}{(\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2})^3},\end{aligned}$$

also genau in die Differentialgleichungen für die relativen Bewegungen zweier Massenpunkte, deren Massensumme $= M$. Folglich:

Die relative Bewegung je zweier Körper um einen dritten ist genau dieselbe, als ob in dem dritten die Summe der drei Massen vereinigt und die Massen der übrigen beiden Punkte $= 0$ wären.

Es bleibt noch übrig, dass $\varphi' = 0$, aber nicht $A_1 = A_2 = A_3 = 0$. Dann erhält man aus VIII):

$$\begin{aligned}r_1^2 P_2' - r_2^2 P_1' &= 0, \\ r_2^2 P_3' - r_3^2 P_2' &= 0, \\ r_3^2 P_1' - r_1^2 P_3' &= 0.\end{aligned}$$

Schreibt man den Ausdruck für φ' in der Form, wie sie unmittelbar vor 45) des vorigen Paragraphen angegeben ist, so folgt:

$$\begin{aligned}r_1^2 P_2' - r_2^2 P_1' + \varphi' [1, 2] \\ &= m_2 \left(\frac{[22][11] - [12]^2}{r_2^3} + \frac{[32][11] - [12][13]}{r_3^3} \right) \\ &- m_1 \left(\frac{[22][11] - [12]^2}{r_1^3} + \frac{[31][22] - [23][13]}{r_3^3} \right) \\ &- M ([22][11] - [12]^2) \cdot \left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} \right).\end{aligned}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}[22][11] - [12]^2 &= -([32][11] - [12][13]) \\ &= -([31][22] - [23][13]) = \Delta,\end{aligned}$$

wobei Δ eine Abkürzung für:

$$\Delta = (r_1 + r_2 + r_3)(r_1 + r_2 - r_3)(r_1 - r_2 + r_3)(-r_1 + r_2 + r_3).$$

Die vorige Gleichung geht also, da $\varphi' = 0$, über in:

$$r_1^2 P_2' - r_2^2 P_1' = \Delta \left[m_1 \left(\frac{1}{r_3^2} - \frac{1}{r_2^3} \right) + m_2 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_3^3} \right) - m_3 \left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) \right] = -\Delta (A_1 + A_2 - A_3).$$

Ebenso:

$$\begin{aligned} r_2^2 P_3' - r_3^2 P_2' &= -\Delta (A_1 - A_2 + A_3), \\ r_3^2 P_1' - r_1^2 P_3' &= -\Delta (-A_1 + A_2 + A_3), \end{aligned}$$

wenn also nicht wieder $A_1 = A_2 = A_3$ sein soll, so muss $\Delta = 0$ sein, d. h. die drei Punkte müssen in einer geraden Linie liegen.

Auch hier beweist man, dass diese Linie in einer festen Ebene liegen muss und dass die Bahnen zweier Punkte um den dritten gerade so vor sich gehen, als ob sie von diesem allein angezogen werden. Allerdings hat man in diesen dritten Punkt nicht die Summen der Massen zu setzen, sondern es waltet hier ein etwas complicirteres Gesetz.

VI. Eine Masse m_1 oder zwei Massen m_1 und m_2 sind $= 0$.

Ist $m_1 = 0$, so geht die erste der Gleichungen 38) über in:

$$\frac{d^2 \cdot \left(r_{23} \cdot \frac{dr_{23}}{dt} \right)}{dt} = - (m_1 + m_3) \frac{r_{23} \frac{dr_{23}}{dt}}{r_{23}^3},$$

welche unmittelbar integrirt werden kann, so dass r_{23} als Function von t erhalten wird. Nach Einsetzung von r_{23} in die beiden anderen Gleichungen 38) gehen diese in zwei Differentialgleichungen dritter Ordnung zwischen r_{12} , r_{13} und t über, von welchen kein Integral bekannt ist, ausser wenn, wie JACOBI gezeigt hat, r_{23} constant.

Der Fall VI ist sehr nahe in unserem Sonnensystem verwirklicht, wenn man nur die Sonne, die Erde und den Mond betrachtet. Die relative Bewegung von Sonne und Erde (besser von Sonne und Schwerpunkt der Erde und des Mondes) ist sehr nahe von der Stellung des Mondes unabhängig. Diese letztere wird dann erst zuletzt ermittelt. Historisch ist es interessant, dass dieser Gedanke der erste Anlass zu den LAGRANGE'schen Untersuchungen gewesen ist.

Sind m_1 und $m_2 = 0$, so können r_{13} und r_{23} und überhaupt die relativen Bewegungen des ersten und zweiten Punktes um den dritten direct nach § 1 bestimmt werden. Die relative Bewegung des 1^{ten} zum 2^{ten} Punkt folgt dann sofort und ergibt sich also, dass die

dritte der Differentialgleichungen 38) auch integriert werden kann. Dasselbe ergibt sich für mehrere Punkte mit verschwindenden Massen in Bezug auf ihre relativen Bewegungen zu einem einzigen Punkt ohne verschwindende Masse und ist dieser Fall sehr nahe für die Planeten und die Sonne verwirklicht.

§ 9.

Geschichtliches über das Problem der drei Körper.

Die Untersuchungen des vorigen Paragraphen verdankt man vorzugsweise LAGRANGE, welcher sie 1772 in der klassischen Abhandlung: „Essai d'une nouvelle méthode pour résoudre le problème des trois corps“ (Oeuvres VI, pag. 229 etc.) veröffentlicht hat. Die bewundernswürdigste Leistung war die Aufstellung der Gleichung (51) zur Bestimmung der Grösse φ und zwar deshalb, weil die Determinantentheorie, mit deren Hilfe sie sich mit der äussersten Leichtigkeit ergibt, damals noch in ihrer Kindheit war.

Im weiteren Verlauf wendet er seine Theorie auf die Untersuchung des von Sonne, Erde und Mond gebildeten Systems an und giebt dabei die grosse Symmetrie auf, welche LAGRANGE sonst so sehr gesucht hat. Das wesentlichste Verdienst dieser Arbeit besteht aber in der Reduction des Problems auf die siebente Ordnung, eine Reduction, welche gleichwerthig ist mit der Aufstellung eines wirklich neuen Integrals.

Eine andere Art der Reduction hat JACOBI im Jahre 1843 in der Abhandlung: „Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps“ (CRELLE's Journal, pag. 115 etc.). Er führt in die Differentialgleichungen zunächst die relativen Coordinaten um den Schwerpunkt ein und betrachtet dann zwei fingirte neue Massenpunkte derart, dass die Coordinaten der drei Punkte (relativ zum Schwerpunkt) lineare Functionen der Coordinaten dieser fingirten Punkte werden, so dass die Bedingungen $\sum m x = \sum m y = \sum m z = 0$ identisch erfüllt werden. Indem er diese neuen Coordinaten auch in die Ausdrücke für das Potential und die lebendige Kraft einführt, erhalten dieselbe eine etwas andere Gestalt. Das so entstehende System 12^{ter} Ordnung wird mit Hilfe der Flächenintegrale und des Satzes von der lebendigen Kraft um vier Einheiten verringert und dann nachgewiesen, dass man durch Einführung von Polarcoordinaten (indem man die unveränderliche Ebene als Grundebene annimmt) das Problem so umgestalten kann, dass der Winkel, den der Knoten der beiden veränderlichen

Bahnebene mit der x Achse bildet, durch eine blosse Quadratur berechnet werden kann, nachdem die übrigen Elemente durch ein System 7^{ter} Ordnung bestimmt sind.

So ausserordentlich elegant diese Darstellung des genialen Mathematikers ist, so hat dieselbe doch keine neue Reduction zur Folge gehabt, da die Ordnung des Endproblems hier genau dieselbe ist, wie bei LAGRANGE.

Uebrigens kann man die Verringerung um einen Grad, welche von LAGRANGE und JACOBI auf so verschiedene Arten vorgenommen ist, auch sofort an den Differentialgleichungen in ihrer ursprünglichen Gestalt ausführen, wie es RADAU: „Sur l'élimination directe du noeud dans le problème des trois corps“ (Comptes rendus LXVII 1868, pag. 841) und ALLEGRET: „Mémoire sur le problème des trois corps“ (Journal de Mathématiques 1875, pag. 277 etc.) gezeigt haben.

Die neueren Bemühungen der Mathematiker haben viele merkwürdige Umgestaltungen des Problems der drei Körper zur Folge gehabt. So haben BERTRAND und BOUR (Mémoire sur le problème des trois corps, Journal de l'école polytechnique 1856, pag. 35 etc.) das durch die 10 bekannten Integrale reducirte Problem 8^{ter} Ordnung in die (in den folgenden Paragraphen von uns zu besprechende) kanonische Gestalt gebracht und zwar so, dass die Function H die Zeit nicht explicite enthält. BOUR bringt den Ausdruck für die lebendige Kraft in eine eigenthümliche Form, so dass er in zwei bestimmt getrennte Theile zerfällt. Der eine hängt nur von der Grösse und Gestalt des von den Körpern gebildeten Dreiecks und der andere nur von der Lage und der Lagenveränderung desselben in Bezug auf die unveränderliche Ebene ab. Unter Benutzung dieser Form gelingt es MATHIEU (Mémoire sur le problème des trois corps, Journal de Mathématiques 1876, pag. 345) durch Einführung eines sehr einfachen Systems von acht Variablen, welche eine leicht übersichtliche geometrische Bedeutung haben, eine kanonische Gruppe von Differentialgleichungen aufzustellen.

So interessant alle diese Arbeiten sind, so konnten sie doch den Grad des Endsystems nicht herabdrücken. Dies ist bis jetzt nur in den beiden Fällen gelungen, dass entweder die Bewegungen in einer Ebene stattfinden oder dass alle drei Flächenintegrale $= 0$ sind. Der letztere Fall ist, wie hier bewiesen worden, nur ein Specialfall des ersteren (jedoch nur für drei Körper), weil die Bewegung eo ipso in einer Ebene stattfindet, wenn die drei Flächenintegrale $= 0$ sind. Es ist dann möglich, noch um zwei Einheiten herunter-

zugehen, wie ALLEGRET in der vorhin angeführten Arbeit beweist. Er hatte geglaubt, durch eigenthümliche Transformationen dieselbe Vereinfachung auch im Allgemeinen vornehmen zu können, doch ist ihm dabei ein Irrthum begegnet, wie MATHIEU nachgewiesen hat. Auch eine andere Vereinfachung, die HESSE in der Abhandlung: „Ueber das Problem der drei Körper“ (CRELLE's Journal 1883, p. 53) eingeführt hat, ist illusorisch, wie J. A. SERRET in einer der Abhandlung von LAGRANGE beigefügten Note nachweist, so dass dieses berühmte Problem im Wesentlichen noch da steht, wo es vor hundert Jahren dieser berühmte Mathematiker hingestellt hat. Nur ist eine fast unerschöpfliche Mannigfaltigkeit interessanter Darstellungen dieses Problems entwickelt worden, Darstellungen, welche nach der Seite 43 angegebenen Arbeit von BRUNS, welche in den Acta mathematica, Bd. 11, abgedruckt worden ist, keine Aussicht bieten, auf algebraischem Wege der Lösung näher zu kommen.

Zweiter Abschnitt.

Die allgemeinen Eigenschaften der Integrale.

§ 10.

Die Poisson'sche Formel, die Lagrange'sche Formel.

Wenn es auch nicht gelungen ist, ausser den früher erwähnten allgemeinen Integralen noch andere zu erhalten, so sind damit die Untersuchungen über das Vielkörperproblem doch nicht geschlossen. Man hat nämlich gewisse, äusserst merkwürdige Eigenschaften der Integrale, der bekannten sowohl als der noch nicht bekannten, entdeckt. Wenn diese Eigenschaften allerdings auch zuerst durch POISSON und LAGRANGE speciell an dem hier vorliegenden System von Differentialgleichungen nachgewiesen worden sind, so hat sie doch JACOBI als fundamental und für ein viel allgemeineres System geltend erkannt. Seine tief sinnigen Untersuchungen, die wir in diesem Abschnitt in ihren Grundzügen kennen lernen werden, sind in mancher Hinsicht von Professor A. MAYER und Professor SOPHUS LIE verallgemeinert und vereinfacht worden.

Um zu denselben zu gelangen, ist es zweckmässig, die Differentialgleichungen der Bewegung des § 6 in eine etwas andere Form zu bringen.

Führt man die Geschwindigkeitscomponenten der Körper als neue selbstständige Variablen mittelst der Gleichungen ein:

$$1) \quad \frac{dx_i}{dt} = u_i, \quad \frac{dy_i}{dt} = v_i, \quad \frac{dz_i}{dt} = w_i, \quad (i = 1, 2 \dots n),$$

so gehen die Bewegungsgleichungen über in:

$$2) \quad m_i \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{dw_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial z_i},$$

wo, wie früher:

$$3) \quad V = \sum \frac{m_\lambda \cdot m_\mu}{r_{\lambda,\mu}} = \sum \frac{m_\lambda \cdot m_\mu}{\sqrt{(x_\lambda - x_\mu)^2 + (y_\lambda - y_\mu)^2 + (z_\lambda - z_\mu)^2}}.$$

Es ist durch Einführung der u_i, v_i, w_i als neuer Variablen die Anzahl derselben allerdings verdoppelt worden und demgemäss auch die Anzahl der Differentialgleichungen, indem die Gleichungen 1) und 2) erst ein geschlossenes System simultaner Differentialgleichungen bilden. Dafür sind aber jetzt sämtliche Differentialgleichungen von der ersten Ordnung.

Man kann die Gleichungen 1) in eine ähnliche Gestalt bringen wie 2), wenn man die lebendige Kraft einführt:

$$4) \quad T = \frac{1}{2} \sum m_i (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2).$$

Dann ist:

$$\frac{\partial T}{\partial u_i} = m_i u_i$$

und 1) verwandelt sich in:

$$m_i \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial T}{\partial u_i}, \quad m_i \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial T}{\partial v_i}, \quad m_i \frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial T}{\partial w_i}.$$

Auch dieses System wollen wir noch vereinfachen. Führt man statt u_i, v_i, w_i wieder neue Variable durch die Gleichungen ein:

$$5) \quad U_i = m_i u_i, \quad V_i = m_i v_i, \quad W_i = m_i w_i,$$

so wird:

$$6) \quad T = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{m_i} (U_i^2 + V_i^2 + W_i^2),$$

$$\frac{\partial T}{\partial u_i} = m_i u_i = m_i \frac{\partial T}{\partial U_i}.$$

Setzt man endlich noch:

$$7) \quad H = -V + T = - \sum \frac{m_\lambda m_\mu}{r_{\lambda,\mu}} + \frac{1}{2} \sum \frac{1}{m_i} (U_i^2 + V_i^2 + W_i^2)$$

und beachtet, dass die x_i, y_i, z_i nur in V , die U_i, V_i, W_i nur in T vorkommen, so nehmen die Bewegungsgleichungen die Gestalt an:

$$8) \quad \begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial U_i}, & \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial V_i}, & \frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial W_i} \\ \frac{dU_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, & \frac{dV_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, & \frac{dW_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z_i}. \end{cases}$$

Führt man der Einfachheit wegen statt der Coordinaten x_i, y_i, z_i den einen Buchstaben p_i und statt der U_i, V_i, W_i den Buchstaben q_i ein, so erhalten die Gleichungen 8) die Gestalt, wenn man noch n statt $3n$ schreibt:

$$9) \quad \begin{cases} \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Um von 9) wieder auf 8) überzugehen, hat man nur $3n$ statt n zu setzen, statt der $p_i : x_i, y_i, z_i$, statt der $q_i : U_i, V_i, W_i$.

Die Differentialgleichungen der Bewegung sind in die eigenthümliche Gestalt 9) gebracht worden. Man kann dieselbe sehr vielen Problemen der Mechanik geben und da sie, wenn einmal vorhanden, nach den verschiedensten Transformationen wieder zum Vorschein kommt, und aus ihr sich die zu entwickelnden Formeln am einfachsten ergeben, so nennt man sie die kanonische Gestalt.

Um sofort möglichst zu verallgemeinern, wollen wir annehmen, dass die Function H des Systems 9) irgend eine gegebene Function der p_i und q_i sei, welche auch die Zeit t enthalten kann. Unter dieser ganz allgemeinen Voraussetzung über die Function H kann man die Gleichungen 9) in folgender Weise bearbeiten.

Multipliziert man die Gleichungen 9) mit $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ und $\frac{\partial H}{\partial q_i}$, so ergibt sich durch Addition:

$$10) \quad \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \frac{dq_i}{dt} \right) = 0.$$

Enthält H die Zeit t nicht, so geht 10) sofort über in:

$$11) \quad \frac{dH}{dt} = 0,$$

mithin ergibt sich:

$$12) \quad H = C,$$

wo C eine Integrationsconstante bezeichnet. Enthält aber H die Zeit, so ergibt sich aus Gleichung 10):

$$13) \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

und also keine integrable Gleichung.

Die Integration der Differentialgleichungen 9) führt $2n$ willkürliche Constante $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ mit sich. LAGRANGE gebührt das Verdienst, diese Constanten als selbstständige analytische Grössen aufgefasst zu haben, eine Idee, welche nach den verschiedensten Seiten hin von grösster Wichtigkeit ist. Wenn man sagt, es ist das

Endziel der Integration, die p_i und q_i als Functionen von t zu ermitteln, so heisst das richtiger: als Functionen von t und der $2n$ Constanten $a_1, \dots, a_{2n}$. In diesem Sinne sind also die zu bestimmenden Endausdrücke von der Gestalt:

$$14) \quad \begin{cases} p_i = p_i(a_1, a_2, \dots, a_{2n}, t) \\ q_i = q_i(a_1, a_2, \dots, a_{2n}, t) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

wo rechts Functionen der eingeklammerten Grössen stehen und vor die Klammer diejenige Grösse gesetzt wird, welche durch diese Functionen bestimmt wird. (Diese Schreibweise empfiehlt sich durch ihre Deutlichkeit und Einfachheit.)

Denkt man die Gleichungen 14) nach den a aufgelöst, so erhält man diese als Function der p_i, q_i, t , also in der Gestalt:

$$15) \quad a_i = a_i(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t).$$

14) und 15) sind Umkehrungen von einander. Denn in derselben Weise, wie aus 14) die Gleichungen 15) entstanden sind, kann man auch aus 15) durch Auflösung nach p_i und q_i wieder das System 14) bilden (wobei t lediglich die Rolle eines Parameters spielt).

Es ist ohne Weiteres klar, dass in der Wahl der Constanten a_i eine grosse Willkür liegt. Denn hat man irgend ein System $a_1, \dots, a_{2n}$ aufgestellt, so kann man irgend $2n$ von einander unabhängige Functionen derselben, welche ja auch constant sind, in die Gleichungen 14) und 15) einführen und so von dem gegebenen System zu irgend einem neuen $a_1', a_2', \dots, a_{2n}'$ übergehen. Es ist dies ein Umstand, welcher uns später von grossem Nutzen sein wird.

Das Problem der Integration kann man also auch so auffassen, dass man $2n$ Gleichungen 15) bildet, d. h. mit anderen Worten, $2n$ Functionen der p_i, q_i, t aufstellt, welche die Eigenschaft haben, mit Hilfe der Gleichungen 9) in Constante überzugehen. Solche Functionen nennt man nach JACOBI im engeren Sinne Integrale der Gleichungen 9). Integrale sind daher Functionen der p_i, q_i, t , welche keine willkürliche Constante enthalten und welche vermittelst der Gleichungen 9) in willkürliche Constanten übergehen.

Diese Functionen genügen einer partiellen linearen Differentialgleichung erster Ordnung, welche auch als ihre Definitionsgleichung angesehen werden kann. Dann ist $a(p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t)$ eine solche Function, so ist:

$$16a) \quad \frac{da}{dt} = 0,$$

also, wenn man total differentiirt:

$$16) \quad 0 = \frac{\partial a}{\partial t} + \sum \frac{\partial a}{\partial p_i} \cdot \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial a}{\partial q_i} \cdot \frac{dq_i}{dt}.$$

Diese Gleichung verwandelt sich mit Hilfe von 9) in:

$$17) \quad 0 = \frac{\partial a}{\partial t} + \sum \frac{\partial a}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial a}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

eine Gleichung, welche, da sie keine willkürliche Constante enthält, identisch sein muss. Sie ist die oben erwähnte partielle Differentialgleichung. Genügt umgekehrt die Function a der Gleichung 17), so erhält man hieraus wieder 16) und 16a), d. h. a ist ein Integral. Die Auffindung von $2n$ Integralen von 9) fällt also zusammen mit der Bestimmung von $2n$ particulären Lösungen von 14) und somit ist das Problem zurückgeführt auf die Betrachtung dieser partiellen Differentialgleichung. Das identische Integral $a = \text{constant}$ ist dabei nicht einbegriffen.

Wir wollen jetzt eine die Darstellungsweise sehr erleichternde Bezeichnung einführen. Sind f und φ zwei Functionen der p_i und q_i (welche auch t enthalten können), so setze man:

$$18) \quad (f, \varphi) = \sum \frac{\partial f}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p_i},$$

so dass $(f, \varphi) = -(\varphi, f)$ und $(f, f) = 0$.

Die Differentialgleichung 17) nimmt dann die Gestalt an:

$$19) \quad \frac{\partial a}{\partial t} + (a, H) = 0,$$

und kann man aus ihr das oben erwähnte POISSON'sche Theorem folgendermaassen ableiten:

Sind f, φ, ψ drei Functionen der p_i und q_i (welche auch t enthalten können), so ergibt sich:

$$((f, \varphi), \psi) = \sum_{i'=1}^{i'=n} \left(\frac{\partial(f, \varphi)}{\partial p_{i'}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q_{i'}} - \frac{\partial(f, \varphi)}{\partial q_{i'}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial p_{i'}} \right),$$

nur ist hier ein anderer Summenindex i' gewählt worden. Setzt man für (f, φ) seinen Werth 18) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} ((f, \varphi), \psi) = & \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{i'=1}^{i'=n} \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_{i'}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q_{i'}} + \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{i'=1}^{i'=n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_i \partial p_{i'}} \cdot \frac{\partial f}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q_{i'}} \\ & - \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{i'=1}^{i'=n} \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial p_{i'}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q_{i'}} - \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{i'=1}^{i'=n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_i \partial p_{i'}} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q_{i'}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial q_{i'}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial p_{i'}} - \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_i \partial q_{i'}} \cdot \frac{\partial f}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q_{i'}} \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_{i'}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial p_{i'}} + \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_i \partial q_{i'}} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial p_{i'}}
\end{aligned}$$

Die vier Doppelsummen, in denen die zweiten Differentialquotienten von f stehen, sind sämtlich in Bezug auf φ und ψ symmetrisch, wie man auf der Stelle durch Vertauschung der beiden Summationsindices i und i' erhält. Ihre algebraische Summe werde für einen Augenblick bezeichnet mit:

$$\{f, [\varphi, \psi]\} = \{f, [\psi, \varphi]\}.$$

Der obige Ausdruck für $((f, \varphi), \psi)$ wird daher:

$$((f, \varphi), \psi) = \{f, [\varphi, \psi]\} - \{\varphi, [f, \psi]\}.$$

Bildet man ebenso die Ausdrücke für $((\varphi, \psi), f)$ und $((\psi, f), \varphi)$, so erhält man durch Addition die merkwürdige identische Gleichung:

$$20) \quad ((f, \varphi), \psi) + ((\varphi, \psi), f) + ((\psi, f), \varphi) = 0,$$

mit deren Hilfe die Poisson'sche Formel sich jetzt leicht beweisen lässt.

Differentiirt man Gleichung 19) nach $p_{i'}$ resp. $q_{i'}$, was man unter der Voraussetzung, dass sie durch Einsetzung von a aus 15) identisch geworden ist, thun darf, so erhält man:

$$21) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial a}{\partial p_{i'}} + \frac{\partial(aH)}{\partial p_{i'}} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial a}{\partial q_{i'}} + \frac{\partial(aH)}{\partial q_{i'}} = 0. \end{cases}$$

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit $\frac{\partial b}{\partial q_{i'}}$, die zweite mit $\frac{\partial b}{\partial p_{i'}}$, wo b irgend eine Function der p und q bedeutet, so folgt durch Summation über i' :

$$22) \quad \sum_{i'=1}^n \left(\frac{\partial b}{\partial q_{i'}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial a}{\partial p_{i'}} - \frac{\partial b}{\partial p_{i'}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial a}{\partial q_{i'}} \right) + ((a, H), b) = 0.$$

Vertauscht man unter der Annahme, dass b ebenfalls ein Integral ist, a mit b und subtrahirt die beiden Gleichungen, so ergibt sich:

$$23) \sum_{i'=1}^{i'=n} \left(\frac{\partial \frac{\partial a}{\partial p_{i'}}}{\partial t} \cdot \frac{\partial b}{\partial q_{i'}} - \frac{\partial \frac{\partial a}{\partial q_{i'}}}{\partial t} \cdot \frac{\partial b}{\partial p_{i'}} - \frac{\partial a}{\partial q_{i'}} \cdot \frac{\partial \frac{\partial b}{\partial p_{i'}}}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial p_{i'}} \cdot \frac{\partial \frac{\partial b}{\partial q_{i'}}}{\partial t} \right) + ((a, H) b) - ((b, H) a) = 0.$$

Das erste Glied ist ohne Weiteres $= \frac{\partial(a, b)}{\partial t}$.

Ferner ist:

$$((b, H), a) = (- (H, b), a) = - ((H, b), a),$$

folglich geht mit Hilfe von 20) die Gleichung 23) über in:

$$24) \frac{\partial(a, b)}{\partial t} + ((a, b), H) = 0.$$

Diese Gleichung entsteht aber sofort aus 19), indem man (a, b) statt a setzt und ergibt sich so der POISSON'sche Satz, welcher lautet:

25) Sind a und b zwei Integrale des Systems 9), so ist (a, b) ebenfalls ein Integral desselben Systems.

Ueberträgt man denselben auf das System 8), so ergibt sich:

Sind a und b zwei Integrale des Systems 8), so ist auch:

$$26) (a, b) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} \left(\frac{\partial a}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial b}{\partial u_i} - \frac{\partial a}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial b}{\partial x_i} + \frac{\partial a}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial b}{\partial v_i} - \frac{\partial a}{\partial v_i} \cdot \frac{\partial b}{\partial y_i} + \frac{\partial a}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial b}{\partial w_i} - \frac{\partial a}{\partial w_i} \cdot \frac{\partial b}{\partial z_i} \right)$$

ein Integral desselben Systems.

Der POISSON'sche Satz liefert also sofort aus zwei Integralen ein neues und zwar durch blosse Differentiation. Allerdings kann dieses eine Function der beiden gegebenen sein und es kann sich auch auf eine blosse Constante oder 0 reduciren. Es kann aber auch in Wirklichkeit ein ganz neues Integral sein. In diesem Falle kann man es wieder mit den beiden ursprünglichen combiniren und erhält zwei weitere Integrale. Indem man in derselben Weise weiter geht, kann man immer neue Integrale herleiten, bis man schliesslich auf solche stösst, welche aus den schon vorhandenen zusammengesetzt sind. Es kann sein, dass dies erst geschieht, wenn man die gebrauchte Anzahl $2n$ erreicht hat, es kann aber auch der Kreis sich früher schliessen. Die folgenden Untersuchungen werden diese interessanten Umstände vollständig erleuchten.

Als Anwendung des POISSON'schen Satzes wollen wir aus zwei Flächenintegralen das dritte ableiten. Es ist hier:

$$a = \sum m_i (y_i w_i - z_i v_i),$$

$$b = \sum m_i (z_i u_i - x_i w_i),$$

also nach 26):

$$(ab) = \sum \frac{1}{m_i} (0 \cdot z_i + 0 \cdot w_i + m_i w_i \cdot 0 - m_i z_i \cdot 0 + m_i v_i \cdot m_i x_i - m_i y_i \cdot m_i u_i) = \sum m_i (x_i v_i - y_i u_i)$$

das dritte Flächenintegral.

Hiermit ist der Kreis vollständig geschlossen. Wendet man den POISSON'schen Satz auf sämtliche früher abgeleitete Integrale an, so ergeben geringe Rechnungen, dass man niemals auf neue Integrale kommt.

Die Flächenintegrale, die Schwerpunktssätze und der Satz von der lebendigen Kraft bilden also einen für sich abgeschlossenen Kreis von Integralen.

Nach Ableitung des POISSON'schen Satzes wollen wir uns mit demjenigen von LAGRANGE beschäftigen. Durch Einsetzung von 14) in 9) müssen diese Gleichungen identisch, d. h. für jeden Werth von $a_1, a_2, \dots, a_{2n}, t$ erfüllt sein. Daher kann man die Gleichungen 9) in diesem Sinne identisch nach a_λ differentiiren, wodurch man erhält:

$$\frac{\partial^2 p_i}{\partial a_\lambda \cdot \partial t} = \frac{\partial \frac{\partial H}{\partial q_i}}{\partial a_\lambda}, \quad \text{oder:}$$

$$\frac{\partial^2 p_i}{\partial a_\lambda \cdot \partial t} = \sum_{i'=1}^{i'=n} \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_{i'}} \cdot \frac{\partial p_{i'}}{\partial a_\lambda} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_{i'}} \cdot \frac{\partial q_{i'}}{\partial a_\lambda} \quad \text{und ebenso:}$$

$$\frac{\partial^2 q_i}{\partial a_\lambda \cdot \partial t} = - \sum_{i'=1}^{i'=n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_{i'}} \cdot \frac{\partial p_{i'}}{\partial a_\lambda} - \sum_{i'=1}^{i'=n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_{i'}} \cdot \frac{\partial q_{i'}}{\partial a_\lambda}.$$

Bezeichnet nun a_μ eine neue Constante und multiplicirt man die erste Gleichung mit $\frac{\partial q_i}{\partial a_\mu}$, die zweite mit $-\frac{\partial p_i}{\partial a_\mu}$ und addirt, nachdem über i summirt worden ist, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial^2 p_i}{\partial a_\lambda \cdot \partial t} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial a_\mu} - \frac{\partial^2 q_i}{\partial a_\lambda \cdot \partial t} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial a_\mu} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{i'=1}^{i'=n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_{i'}} \cdot \frac{\partial p_{i'}}{\partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial a_\mu} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_{i'}} \cdot \frac{\partial q_{i'}}{\partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial a_\mu} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_{i'}} \cdot \frac{\partial p_{i'}}{\partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial a_\mu} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_{i'}} \cdot \frac{\partial q_{i'}}{\partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial a_\mu} \right). \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist in Bezug auf a_λ und a_μ symmetrisch und daher folgt:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial^2 p_i}{\partial a_\lambda \cdot \partial t} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial a_\mu} - \frac{\partial^2 q_i}{\partial a_\lambda \cdot \partial t} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial a_\mu} - \frac{\partial^2 p_i}{\partial a_\mu \cdot \partial t} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial a_\lambda} + \frac{\partial^2 q_i}{\partial a_\mu \cdot \partial t} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial a_\lambda} \right) = 0,$$

oder:

$$27) \quad \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial p_i}{\partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial a_\mu} - \frac{\partial q_i}{\partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial a_\mu} \right) \right] = 0.$$

Diese Gleichung beweist den Satz von LAGRANGE, dass der Ausdruck:

$$28) \quad [a_\lambda, a_\mu] = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial p_i}{\partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial a_\mu} - \frac{\partial q_i}{\partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial a_\mu} \right)$$

von t unabhängig, also lediglich eine Function der Constanten a ist.

Die Ausdrücke $[a_\lambda, a_\mu]$ haben übrigens ebenfalls die Eigenschaft, dass

$$29) \quad [a_\mu, a_\lambda] = -[a_\lambda, a_\mu] \quad \text{und} \quad [a_\lambda, a_\lambda] = 0.$$

Für das System 8) erhält man:

$$30) \quad [a_\lambda, a_\mu] = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial a_\mu} - \frac{\partial u_i}{\partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial a_\mu} + \frac{\partial y_i}{\partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial a_\mu} - \frac{\partial v_i}{\partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial a_\mu} + \frac{\partial z_i}{\partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial w_i}{\partial a_\mu} - \frac{\partial w_i}{\partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial a_\mu} \right).$$

Die LAGRANGE'sche Formel ist nicht wie die von POISSON ein Princip, welches unter Umständen neue Resultate liefern kann. Denn die Bildung des Ausdruckes $[a_\lambda, a_\mu]$ verlangt schon den Besitz sämtlicher Gleichungen 14), also die Lösung des Problems. Indessen sind doch beide Sätze ausserordentlich mit einander verwandt, so dass man den einen direct als Umkehrung des anderen ansehen kann, ein Umstand, der allerdings LAGRANGE, welcher der POISSON'schen Formel erwähnt, entgangen zu sein scheint.

Um diesen Zusammenhang zu bestimmen, wollen wir zunächst einige Sätze über Determinanten zusammenstellen, welche den folgenden Untersuchungen zur Grundlage dienen.

Es sei die Determinante $2n^{\text{ten}}$ Grades gegeben:

$$31) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \dots & a_{1,2n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \dots & a_{2,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n,1}, & a_{2n,2}, & \dots & a_{2n,2n} \end{vmatrix}$$

und sei vorausgesetzt, dass dieselbe nicht $= 0$ ist. Die zu irgend einem Elemente $a_{\lambda,\mu}$ zugehörige Unterdeterminante wollen wir mit $A_{\mu,\lambda}$ bezeichnen, nachdem sie durch Δ dividirt ist, so dass:

$$32) \quad A_{\mu,\lambda} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{\lambda,\mu}}.$$

Stellt man die A ebenfalls zu der Determinante zusammen:

$$33) \quad D = \begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2}, & \dots & A_{1,2n} \\ A_{2,1}, & A_{2,2}, & \dots & A_{2,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{2n,1}, & A_{2n,2}, & \dots & A_{2n,2n} \end{vmatrix}$$

so ist die Beziehung zwischen Δ und D eine conjugirte, weshalb wir diese beiden Determinanten conjugirte nennen wollen. Es ist also auch:

$$34) \quad a_{\mu,\lambda} = \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial D}{\partial A_{\lambda,\mu}}$$

und zugleich ist:

$$35) \quad D \cdot \Delta = 1.$$

Zwischen den Elementen von 31) und 33) finden die bekannten Beziehungen statt:

$$36) \quad a_{\lambda,1} \cdot A_{1,\lambda} + a_{\lambda,2} \cdot A_{2,\lambda} + \dots + a_{\lambda,2n} \cdot A_{2n,\lambda} = 1,$$

$$37) \quad a_{\lambda,1} \cdot A_{1,\mu} + a_{\lambda,2} \cdot A_{2,\mu} + \dots + a_{\lambda,2n} \cdot A_{2n,\mu} = 0, \quad \mu > \lambda,$$

und ebenso:

$$38) \quad a_{1,\lambda} \cdot A_{\lambda,1} + a_{2,\lambda} \cdot A_{\lambda,2} + \dots + a_{2n,\lambda} \cdot A_{\lambda,2n} = 1,$$

$$39) \quad a_{1,\lambda} \cdot A_{\mu,1} + a_{2,\lambda} \cdot A_{\mu,2} + \dots + a_{2n,\lambda} \cdot A_{\mu,2n} = 0, \quad \mu > \lambda.$$

Setzt man:

$$40) \quad a_{1,\lambda} \cdot x_1 + a_{2,\lambda} \cdot x_2 + \dots + a_{2n,\lambda} \cdot x_{2n} = y_\lambda \quad (\lambda=1, \dots, 2n)$$

und löst die $2n$ Gleichungen 40) in Bezug auf $x_1 \dots x_{2n}$ als Unbekannte auf, so lauten diese Auflösungen:

$$41) \quad A_{1,\lambda} \cdot y_1 + A_{2,\lambda} \cdot y_2 + \dots + A_{2n,\lambda} \cdot y_{2n} = x_\lambda$$

und ebenso ergibt sich die Auflösung des Systems:

$$42) \quad a_{\lambda,1} \cdot x_1 + a_{\lambda,2} \cdot x_2 + \cdots + a_{\lambda,2n} \cdot x_{2n} = y_{\lambda} \quad (\lambda=1, \dots, 2n)$$

nach den x durch die Gleichungen:

$$43) \quad A_{\lambda,1} \cdot y_1 + A_{\lambda,2} \cdot y_2 + \cdots + A_{\lambda,2n} \cdot y_{2n} = x_{\lambda}.$$

Hiermit sind die wichtigsten Eigenschaften der beiden conjugirten Determinanten D und Δ angegeben, welche ebenso bestehen, wenn ihr Grad ungerade ist. Für die folgenden Entwicklungen muss man sich aber ausdrücklich auf die geraden Determinanten beschränken.

Bildet man das Quadrat von Δ nach dem Multiplicationstheorem der Determinanten durch Combination von Horizontal- oder Vertikalreihen, so ergibt es sich in Gestalt einer symmetrischen Determinante. Es lässt sich aber, wie — so viel mir bekannt — zuerst von BRIOSCHI gezeigt worden, durch eine leichte Modification in eine schiefe Determinante bringen, d. h. in eine Determinante, deren Diagonalglieder $= 0$ und deren zu der Diagonale symmetrisch gelegene Glieder entgegengesetzt gleich sind. Man kann dazu gelangen, indem man in 31) die 1^{te} Horizontalreihe mit der mit negativen Vorzeichen genommenen $(n+1)$ ^{ten} Horizontalreihe, ebenso die 2^{te} Horizontalreihe mit der mit negativen Vorzeichen genommenen $(n+2)$ ^{ten} Horizontalreihe u. s. w. vertauscht. Um dies schärfer hervortreten zu lassen, mögen in 31) die Glieder der n letzten Horizontalreihen mit dem Buchstaben b bezeichnet werden, so dass die Determinante wird:

$$44) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,2n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,2n} \\ b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,2n} \end{vmatrix}$$

Die transformirte Determinante wird dann:

$$45) \quad \Delta' = \begin{vmatrix} -b_{1,1} & -b_{1,2} & \dots & -b_{1,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_{n,1} & -b_{n,2} & \dots & -b_{n,2n} \\ +a_{1,1} & +a_{1,2} & \dots & +a_{1,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ +a_{n,1} & +a_{n,2} & \dots & +a_{n,2n} \end{vmatrix}$$

Es wird ferner, wenn die Vertikalreihen componirt werden:

$$46) \quad E = \Delta \cdot \Delta' = \Delta^2 = \begin{vmatrix} c_{1,1}, & c_{1,2}, & \dots, & c_{1,2n} \\ c_{2,1}, & c_{2,2}, & \dots, & c_{2,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{2n,1}, & c_{2n,2}, & \dots, & c_{2n,2n} \end{vmatrix}$$

wo allgemein:

$$47) \quad c_{\lambda,\mu} = a_{1,\lambda} \cdot b_{1,\mu} + a_{2,\lambda} \cdot b_{2,\mu} + \dots + a_{n,\lambda} \cdot b_{n,\mu} \\ - b_{1,\lambda} \cdot a_{1,\mu} - b_{2,\lambda} \cdot a_{2,\mu} - \dots - b_{n,\lambda} \cdot a_{n,\mu},$$

und also, wie es sein soll:

$$c_{\lambda,\mu} + c_{\mu,\lambda} = 0.$$

Ferner wollen wir entsprechend in 33) die Elemente der n letzten Vertikalreihen mit dem Buchstaben B bezeichnen, also setzen:

$$48) \quad D = \begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2}, & \dots & A_{1,n}, & B_{1,1}, & \dots & B_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{2n,1}, & A_{2n,2}, & \dots & A_{2n,n}, & B_{2n,1}, & \dots & B_{2n,n} \end{vmatrix}$$

Schreibt man D ebenso in der neuen Gestalt:

$$49) \quad D' = \begin{vmatrix} -B_{1,1}, & -B_{1,2}, & \dots, & +A_{1,1}, & \dots, & +A_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -B_{2n,1}, & -B_{2n,2}, & \dots, & +A_{2n,1}, & \dots, & +A_{2n,n} \end{vmatrix}$$

so ist, wenn man hier die Horizontalreihen combinirt:

$$50) \quad F = D \cdot D' = D^2 = \begin{vmatrix} C_{1,1}, & C_{1,2}, & \dots, & C_{1,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{2n,1}, & C_{2n,2}, & \dots, & C_{2n,2n} \end{vmatrix}$$

wo:

$$51) \quad C_{\mu,\lambda} = A_{\lambda,1} \cdot B_{\mu,1} + \dots + A_{\lambda,n} \cdot B_{\mu,n} \\ - B_{\lambda,1} \cdot A_{\mu,1} - \dots - B_{\lambda,n} \cdot A_{\mu,n}$$

und also auch:

$$C_{\lambda,\mu} + C_{\mu,\lambda} = 0.$$

Es ist zunächst ohne Weiteres:

$$E \cdot F = \Delta^2 \cdot D^2 = 1.$$

Zwischen den beiden schiefen Determinanten E und F findet aber ein weit innigerer Zusammenhang statt, sie sind ebenso conjugirte Determinanten, wie 44) und 48), also D und Δ . Für diese ist, der Definition der conjugirten Determinanten gemäss:

$$52) \quad A_{\lambda, \mu} = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial a_{\mu, \lambda}}, \quad B_{\lambda, \mu} = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial b_{\mu, \lambda}},$$

$$53) \quad a_{\lambda, \mu} = \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial D}{\partial A_{\mu, \lambda}}, \quad b_{\lambda, \mu} = \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial D}{\partial B_{\mu, \lambda}}.$$

Um die entsprechenden Gleichungen für E und F abzuleiten, schreibe man 47) mit Hilfe von 53) in der Gestalt:

$$c_{\lambda, \mu} = \frac{1}{D^2} \left(\frac{\partial D}{\partial A_{\lambda, 1}} \cdot \frac{\partial D}{\partial B_{\mu, 1}} \dots + \frac{\partial D}{\partial A_{\lambda, n}} \cdot \frac{\partial D}{\partial B_{\mu, n}} \right. \\ \left. - \frac{\partial D}{\partial B_{\lambda, 1}} \cdot \frac{\partial D}{\partial A_{\mu, 1}} \dots - \frac{\partial D}{\partial B_{\lambda, n}} \cdot \frac{\partial D}{\partial A_{\mu, n}} \right),$$

oder auch mit Berücksichtigung von 49):

$$c_{\lambda, \mu} = \frac{1}{D \cdot D'} \cdot \left(\frac{\partial D}{\partial B_{\mu, 1}} \cdot \frac{\partial D'}{\partial A_{\lambda, 1}} \dots + \frac{\partial D}{\partial B_{\mu, n}} \cdot \frac{\partial D'}{\partial A_{\lambda, n}} \right. \\ \left. + \frac{\partial D}{\partial A_{\mu, 1}} \cdot \frac{\partial D'}{\partial (-B_{\lambda, 1})} \dots + \frac{\partial D}{\partial A_{\mu, n}} \cdot \frac{\partial D'}{\partial (-B_{\lambda, n})} \right),$$

d. h. $c_{\lambda, \mu}$ ist $= \frac{1}{D \cdot D'}$ mal der Summe der Producte der Unter-determinanten der μ^{ten} Horizontalreihe von 48) mit den entsprechenden Unter-determinanten der λ^{ten} Horizontalreihe von 49). Nach dem erweiterten Multiplicationstheorem ist daher $c_{\lambda, \mu} = \frac{1}{D \cdot D'}$ mal der Unter-determinante des componirten Systems von 48) und 49), also des Systems F , welche dem Gliede $C_{\mu, \lambda}$ entspricht.

Es ist also:

$$54) \quad c_{\lambda, \mu} = \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial C_{\mu, \lambda}}$$

und ebenso:

$$55) \quad C_{\lambda, \mu} = \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial c_{\mu, \lambda}},$$

womit der Nachweis, dass E und F conjugirte Determinanten sind, geliefert ist.

Ist also $x_1 \dots x_{2n}$ ein System von $2n$ Variablen und bestimmt man ein zweites System $y_1 \dots y_{2n}$ durch die linearen Substitutionen:

$$56) \quad c_{1,\lambda} \cdot x_1 + c_{2,\lambda} \cdot x_2 + \dots + c_{2n,\lambda} \cdot x_{2n} = y_\lambda \quad (\lambda = 1, 2 \dots 2n),$$

so sind die Auflösungen dieser Gleichungen:

$$57) \quad C_{1,\lambda} \cdot y_1 + C_{2,\lambda} \cdot y_2 + \dots + C_{2n,\lambda} \cdot y_{2n} = x_\lambda \quad (\lambda = 1, 2 \dots 2n).$$

Zwischen den vier Determinanten D, Δ, E, F finden noch andere Beziehungen statt. Lässt man in 47) den Index μ alle Werthe von 1 bis $2n$ durchlaufen und löst die entstehenden $2n$ Gleichungen nach $a_{1,\lambda} \dots a_{n,\lambda}, b_{1,\lambda} \dots b_{n,\lambda}$ als Unbekannte auf, so folgt:

$$58) \quad \begin{cases} a_{\mu,\lambda} = c_{\lambda,1} \cdot B_{1,\mu} + c_{\lambda,2} \cdot B_{2,\mu} + \dots + c_{\lambda,2n} \cdot B_{2n,\mu} \\ -b_{\mu,\lambda} = c_{\lambda,1} \cdot A_{1,\mu} + c_{\lambda,2} \cdot A_{2,\mu} + \dots + c_{\lambda,2n} \cdot A_{2n,\mu} \end{cases}$$

Diese Formeln beweisen, dass man durch Combination von E und D identisch wieder auf das System Δ' gelangt, vorausgesetzt, dass man die Horizontalreihen von E mit den Vertikalreihen von D combinirt. Ebenso erhält man aus 51):

$$59) \quad \begin{cases} A_{\lambda,\mu} = C_{1,\lambda} \cdot b_{\mu,1} + \dots + C_{2n,\lambda} \cdot b_{\mu,2n}, \\ -B_{\lambda,\mu} = C_{1,\lambda} \cdot a_{\mu,1} + \dots + C_{2n,\lambda} \cdot a_{\mu,2n}. \end{cases}$$

Diese Determinantenentwickelungen können unmittelbar auf den POISSON'schen und den LAGRANGE'schen Satz angewendet werden. Die Gleichungen 15) sind die Auflösungen von 14). Setzt man sie daher in 14) ein, so müssen die Gleichungen identische werden und in diesem Sinne erhält man also durch Differentiation von 14):

$$60) \quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial p_\lambda}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial a_1}{\partial p_\mu} + \dots + \frac{\partial p_\lambda}{\partial a_{2n}} \cdot \frac{\partial a_{2n}}{\partial p_\mu} + \dots \quad (\lambda \leq \mu), \\ 0 = \frac{\partial p_\lambda}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial a_1}{\partial q_\mu} + \dots + \frac{\partial p_\lambda}{\partial a_{2n}} \cdot \frac{\partial a_{2n}}{\partial q_\mu} \\ 1 = \frac{\partial p_\lambda}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial a_1}{\partial p_\lambda} + \dots + \frac{\partial p_\lambda}{\partial a_{2n}} \cdot \frac{\partial a_{2n}}{\partial p_\lambda} \end{cases}$$

u. s. w. und ebenso durch Einsetzen von 14) in 15):

$$61) \quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial a_\mu} + \dots + \frac{\partial a_\lambda}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial a_\mu} + \dots \quad (\lambda \leq \mu), \\ 1 = \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial a_\lambda} + \dots + \frac{\partial a_\lambda}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial a_\lambda} + \dots \end{cases}$$

Setzt man also:

$$62) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\mu} = a_{\mu, \lambda} \\ \frac{\partial a_\lambda}{\partial q_\mu} = b_{\mu, \lambda} \\ \frac{\partial p_\mu}{\partial a_\lambda} = A_{\lambda, \mu} \\ \frac{\partial q_\mu}{\partial a_\lambda} = B_{\lambda, \mu} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (\lambda = 1, 2, \dots, 2n), \\ (\mu = 1, 2, \dots, n), \end{array}$$

so bilden die $a_{\lambda, \mu}$, $b_{\lambda, \mu}$, $A_{\mu, \lambda}$, $B_{\mu, \lambda}$ zwei conjugirte Systeme D und Δ . Die Verbindung $c_{\lambda, \mu}$ wird hier:

$$c_{\lambda, \mu} = \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial a_\mu}{\partial q_1} + \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial a_\mu}{\partial q_2} + \dots \\ - \frac{\partial a_\lambda}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial a_\mu}{\partial p_1} - \frac{\partial a_\lambda}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial a_\mu}{\partial p_2} - \dots,$$

also einfach:

$$63) \quad c_{\lambda, \mu} = (a_\lambda, a_\mu).$$

Ferner ist:

$$C_{\mu, \lambda} = \frac{\partial p_1}{\partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial a_\mu} + \frac{\partial p_2}{\partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial a_\mu} + \dots \\ - \frac{\partial p_1}{\partial a_\mu} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial p_2}{\partial a_\mu} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial a_\lambda} - \dots,$$

also einfach:

$$64) \quad C_{\mu, \lambda} = [a_\lambda, a_\mu].$$

Somit sehen wir, dass, wenn man die n^2 POISSON'schen Ausdrücke und die n^2 LAGRANGE'schen Ausdrücke in Determinanten zusammenstellt, diese beiden Determinanten conjugirte werden. Hierin liegt der ausserordentlich innige Zusammenhang zwischen beiden Theoremen.

§ 11.

Entwicklung der Poisson'schen und Lagrange'schen Formeln für die Elemente der elliptischen Bahn des Planeten um die Sonne.

Die Formeln des vorigen Paragraphen können hier sofort angewendet werden. Setzt man:

$$1) \quad \frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w,$$

so wird:

$$2) \quad H = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} - \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

und die Differentialgleichungen der Bewegung erhalten die Gestalt:

$$3) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial u}, & \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v}, & \frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial w}, \\ \frac{du}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, & \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}, & \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z}. \end{cases}$$

Wir setzen hier:

$$4) \quad (a_\lambda, a_\mu) = \frac{\partial a_\lambda}{\partial x} \cdot \frac{\partial a_\mu}{\partial u} + \frac{\partial a_\lambda}{\partial y} \cdot \frac{\partial a_\mu}{\partial v} + \frac{\partial a_\lambda}{\partial z} \cdot \frac{\partial a_\mu}{\partial w} - \frac{\partial a_\lambda}{\partial u} \cdot \frac{\partial a_\mu}{\partial x} - \frac{\partial a_\lambda}{\partial v} \cdot \frac{\partial a_\mu}{\partial y} - \frac{\partial a_\lambda}{\partial w} \cdot \frac{\partial a_\mu}{\partial z},$$

$$5) \quad [a_\lambda, a_\mu] = \frac{\partial x}{\partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial u}{\partial a_\mu} + \frac{\partial y}{\partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial v}{\partial a_\mu} + \frac{\partial z}{\partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial w}{\partial a_\mu} - \frac{\partial u}{\partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial x}{\partial a_\mu} - \frac{\partial v}{\partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial y}{\partial a_\mu} - \frac{\partial w}{\partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial z}{\partial a_\mu}.$$

Die sechs Integrationsconstanten sind hier der Reihe nach:

$$6) \quad \begin{cases} a_1 = a = \text{grosse Achse,} \\ a_2 = e = \text{Excentricität,} \\ a_3 = \Omega = \text{Länge des Knotens,} \\ a_4 = i = \text{Bahnneigung,} \\ a_5 = \pi = \text{Länge des Perihels,} \\ a_6 = \varepsilon = \text{mittlere Länge des Planeten für } t = 0. \end{cases}$$

Es empfiehlt sich, hier zuerst die LAGRANGE'schen Grössen $[a_\lambda, a_\mu]$ zu berechnen, weil man dann sofort die Formeln 19), § 2, anwenden kann, nachdem man für ξ und η ihre Functionen von t eingesetzt hat. Die Geschwindigkeitscomponenten u, v, w erhält man sofort, wenn in 19), § 2, $\frac{d\xi}{dt}$ oder ξ' statt ξ und $\frac{d\eta}{dt}$ oder η' statt η geschrieben wird.

Setzt man also:

$$7) \quad \begin{cases} x = \xi A + \eta B \\ y = \xi A_1 + \eta B_1 \\ z = \xi A_2 + \eta B_2, \end{cases}$$

wo die A und B die 6 Coefficienten von 19), § 2, bedeuten, so wird:

$$8) \quad \begin{cases} u = \xi' A + \eta' B, \\ v = \xi' A_1 + \eta' B_1, \\ w = \xi' A_1 + \eta' B_2, \end{cases}$$

Die Differentialquotienten nach Ω und i sind am leichtesten zu erledigen, weil diese Elemente nur in den A und B vorkommen. Ihre Ermittlung stösst also auf keine Schwierigkeiten. Das Element a kommt zweimal vor, nämlich erstens explicite als Factor und zweitens implicite im Winkel:

$$M = nt + \varepsilon - \pi = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \cdot t + \varepsilon - \pi.$$

Bezeichnet man den ganzen Differentialquotienten durch Einschliessen in eine Klammer und den nach dem explicite vorkommenden a ohne eine solche, so wird:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial a} \right) = \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial x}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial a} = \frac{\partial x}{\partial a} - \frac{3}{2} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \frac{tn}{a} = \frac{x}{a} - \frac{3}{2} \cdot \frac{t}{a} u$$

u. s. w.

Berücksichtigt man, dass in $u = \frac{\partial x}{dt} = \frac{\partial x}{\partial M} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ das Element a nur in der $-\frac{1}{2}$ ten Potenz enthalten ist, so folgt ebenso:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial a} \right) = -\frac{u}{2a} - \frac{3}{2} \cdot \frac{t}{a} \cdot \frac{du}{dt} = -\frac{u}{2a} + \frac{3}{2} \cdot \frac{t}{a} \cdot \frac{x}{r^3} \quad \text{u. s. w.}$$

Was das Element ε anbetrifft, so kommt es nur in der Verbindung $M = nt + \varepsilon - \pi$ vor. Es ist also:

$$9) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{1}{n} = \frac{u}{n}, \\ \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{1}{n} = -\frac{\mu \cdot x}{nr^3} \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Das Element π ist auch doppelt enthalten, nämlich erstens in den ξ und η selbst und zweitens explicite in den A und B . Bezeichnet man den ganzen Differentialquotienten nach π wieder durch eine Klammer und den Theil desselben, welcher durch Differentiation von A und B entsteht, ohne Klammer und berücksichtigt, dass π in M nur in der Verbindung $\varepsilon - \pi$ vorkommt, so wird:

$$10) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial x}{\partial \pi} \right) = \frac{\partial x}{\partial \pi} - \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \pi} \right) = \frac{\partial u}{\partial \pi} - \frac{\partial u}{\partial \varepsilon}. \end{cases}$$

Etwas umständlicher ist die Berechnung der Differentialquotienten nach e . Um diese zu bilden, kann man von den Gleichungen ausgehen:

$$11) \quad \begin{cases} \xi = a \cdot (\cos E - e), \\ \eta = a \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \sin E. \end{cases}$$

Dann erhält man leicht:

$$12) \quad \begin{cases} \xi' = -a \cdot n \cdot \frac{\sin E}{1 - e \cos E}, \\ \eta' = a \cdot n \cdot \frac{\sqrt{1 - e^2} \cdot \cos E}{1 - e \cos E}. \end{cases}$$

Um die Differentialquotienten der vier Grössen ξ, η, ξ', η' nach e zu bilden, ist also nur noch die Kenntniss von $\frac{\partial E}{\partial e}$ nothwendig. Es ist:

$$M = nt + \varepsilon - \pi = E - e \sin E,$$

also durch Differentiation nach e :

$$0 = \frac{\partial E}{\partial e} (1 - e \cos E) - \sin E,$$

folglich:

$$13) \quad \frac{\partial E}{\partial e} = \frac{\sin E}{1 - e \cos E}.$$

Nach diesen Vorbereitungen ist es nicht schwer, die 36 Differentialquotienten der Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten nach den Elementen zu berechnen.

Um aber die Ausdrücke $[a_\lambda, a_\mu]$, deren Zahl im Wesentlichen hier = 15 ist, aufzustellen, kann man in diesen 36 Differentialquotienten ohne Weiteres für t einen speciellen Werth nehmen. Man kann also z. B. setzen:

$$M = E = 0,$$

wodurch die nothwendig auszuführenden Rechnungen noch bedeutend reducirt werden.

Uebrigens kann man fünf der zu entwickelnden Verbindungen auf anderem Wege sofort herstellen.

Die Gleichung der lebendigen Kraft ist hier nämlich:

$$14) \quad H = - \frac{\mu}{2a}$$

und muss dieselbe nach Einsetzung der Ausdrücke der Coordinaten und Geschwindigkeiten als Functionen der Zeit und der Elemente

identisch werden. Differentiirt man in diesem Sinne Gleichung 14) nach irgend einem Element k , mit Ausnahme von a , so folgt:

$$15) \quad \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial k} + \dots + \frac{\partial H}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial k} + \dots = 0.$$

Benutzt man nun die Gleichungen 3) und bemerkt, dass t nur in der Verbindung $nt + \varepsilon$ vorkommt, dass also:

$$\frac{dx}{dt} = n \cdot \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \dots \quad \frac{du}{dt} = n \cdot \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \dots,$$

so folgt aus 15) unmittelbar:

$$[\varepsilon, k] = 0.$$

Es ist also:

$$16) \quad [\varepsilon, e] = [\varepsilon, \Omega] = [\varepsilon, i] = [\varepsilon, \pi] = 0.$$

Ist aber k die grosse Achse a selbst, so muss $\frac{\mu}{2a^2}$ auf der rechten Seite von 15) stehen und man erhält:

$$\frac{\partial H}{\partial a} = + \frac{\mu}{2} \cdot \frac{1}{a^2} \quad - n[a, \varepsilon] = \frac{\mu}{2a^2}, \quad \text{also:}$$

$$17) \quad [a, \varepsilon] = - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a}}.$$

Das Element ε ist somit vollständig erledigt. Die übrigen zehn Verbindungen können nach den obigen Vorbereitungen ohne Mühe, wenn auch mit Aufwand einiger Rechnungen bestimmt werden. Die Resultate sind:

$$18) \quad \left\{ \begin{array}{l} [a, \varepsilon] = - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a}}, \\ [a, \Omega] = \sqrt{\frac{\mu}{a} (1 - e^2)} \cdot \frac{1 - \cos i}{2}, \\ [a, \pi] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a}} \cdot (1 - \sqrt{1 - e^2}), \\ [e, \Omega] = - e \sqrt{\frac{\mu \cdot a}{1 - e^2}} \cdot (1 - \cos i), \\ [e, \pi] = \sqrt{\frac{\mu \cdot a}{1 - e^2}} \cdot e, \\ [\Omega, i] = - \sqrt{\mu \cdot a (1 - e^2)} \cdot \sin i. \end{array} \right.$$

Die übrigen LAGRANGE'schen Verbindungen werden sämmtlich $= 0$.

Die Determinante F (§ 10, 50) wird hier also:

19) $F =$

	$a_1 = a$	$a_2 = e$	$a_3 = \Omega$	$a_4 = i$	$a_5 = \pi$	$a_6 = \varepsilon$
a	0	0	$\sqrt{\frac{\mu}{a}(1-e^2)} \cdot \frac{1-\cos i}{2}$	0	$\sqrt{\frac{\mu}{a} \cdot \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{2}}$	$-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a}}$
e	0	0	$-e \sqrt{\frac{\mu \cdot a}{1-e^2}} \cdot (1-\cos i)$	0	$\sqrt{\frac{\mu \cdot a}{1-e^2} \cdot e}$	0
Ω	$-\sqrt{\frac{\mu}{a}(1-e^2)} \cdot \frac{1-\cos i}{2}$	$e \sqrt{\frac{\mu \cdot a}{1-e^2}} \cdot 1-\cos i$	0	$-\sqrt{\mu \cdot a(1-e^2)} \cdot \sin i$	0	0
i	0	0	$+\sqrt{\mu \cdot a(1-e^2)} \cdot \sin i$	0	0	0
π	$-\sqrt{\frac{\mu}{a} \cdot \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{2}}$	$-\sqrt{\frac{\mu \cdot a}{1-e^2} \cdot e}$	0	0	0	0
ε	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a}}$	0	0	0	0	0

Da alle Elemente dieser Determinante rechts von der zweiten Diagonale $= 0$ sind, so ist sie gleich dem negativen Product der Elemente der zweiten Diagonalreihe. Also:

$$20) \quad F = ([a, \varepsilon] [\Omega, i] [\pi, e])^2 = \frac{1}{4} \cdot \mu^3 \cdot a \cdot e^2 \cdot \sin^2 i.$$

Auch die Berechnung der Unterdeterminanten von F gestaltet sich in Folge des Nullwerdens so vieler Elemente sehr einfach. Dividirt man dieselben noch durch F , so ergibt sich:

$$21) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a, \varepsilon) = -2 \sqrt{\frac{a}{\mu}}, \\ (e, \pi) = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{1-e^2}{\mu \cdot a}}, \\ (e, \varepsilon) = + \frac{(1 - \sqrt{1-e^2}) \cdot \sqrt{1-e^2}}{e \sqrt{\mu \cdot a}}, \\ (\Omega, i) = - \frac{1}{\sin i \sqrt{\mu \cdot a (1-e^2)}}, \\ (i, \pi) = + \frac{1 - \cos i}{\sin i \sqrt{\mu \cdot a (1-e^2)}}, \\ (i, \varepsilon) = \frac{1 - \cos i}{\sin i \sqrt{\mu \cdot a (1-e^2)}}. \end{array} \right.$$

Alle übrigen Poisson'schen Verbindungen sind $= 0$.

Die Determinante E (§ 10, 46) wird demnach:

22) $E =$

	a	e	Ω	i	π	ε
a	0	0	0	0	0	$2\sqrt{\frac{a}{\mu}}$
e	0	0	0	0	$-\frac{1}{e}\sqrt{\frac{1-e^2}{\mu.a}}$	$-\frac{(1-\sqrt{1-e^2}).\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{\mu.a}}$
Ω	0	0	0	$\frac{1}{\sin i \sqrt{\mu.a(1-e^2)}}$	0	0
i	0	0	$\frac{1}{\sin i \sqrt{\mu.a(1-e^2)}}$	0	$\frac{1-\cos i}{\sin i \sqrt{\mu.a(1-e^2)}}$	$\frac{1-\cos i}{\sin i \sqrt{\mu.a(1-e^2)}}$
π	0	$+\frac{1}{e}\sqrt{\frac{1-e^2}{\mu.a}}$	0	$\frac{1-\cos i}{\sin i \sqrt{\mu.a(1-e^2)}}$	0	0
ε	$-\frac{2}{\mu}\sqrt{\frac{a}{\mu}}$	$+\frac{(1-\sqrt{1-e^2}).\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{\mu.a}}$	0	$\frac{1-\cos i}{\sin i \sqrt{\mu.a(1-e^2)}}$	0	0

Diese Tabellen, welche zum ersten Male von LAGRANGE und LAPLACE gleichzeitig angegeben worden sind, zeigen, dass 9 der zu berechnenden Verbindungen $[a_\lambda, a_\mu]$ resp. $(a_\lambda, a_\mu) = 0$ sind und dass die Elemente ε , π und Ω in ihnen überhaupt nicht enthalten sind. Es liegt daher nahe, zu untersuchen, ob man nicht durch eine Wahl von anderen Elementen, welche Functionen der hier angenommenen sind, diese Verbindungen noch weiter reduciren könne. Es würde auch nicht schwer sein, solche Elemente aufzustellen, jedoch wollen wir im nächsten Paragraphen eine ganz allgemeine Theorie entwickeln, welche dann auf den hier vorliegenden speciellen Fall mit Leichtigkeit angewendet werden kann.

§ 12.

Das kanonische System von Integrationsconstanten.

Wenn a und b irgend zwei gegebene Functionen der p_i und q_i sind, so definirt der POISSON'sche Ausdruck (a, b) eine durch diese beiden bestimmte dritte Function. Sind a und b also zwei Integrale (welche auch t enthalten können), so stellt (a, b) ein drittes Integral vor. Ist aber $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ ein vollständiges System von Integralen, so entstehen (vom Vorzeichen abgesehen) $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ solche Verbindungen und hier wollen wir nachweisen, dass diese Verbindungen alle bei geeigneter Wahl der Integrale sehr einfache Werthe annehmen.

Um den Kern der Untersuchung hervortreten zu lassen, wollen wir zunächst von der hier vorliegenden Anwendung der POISSON'schen Verbindungen (a, b) ganz absehen und dieselben für sich genauer betrachten.

Es seien $a_1, a_2, \dots, a_m$ eine beliebige Anzahl gegebener Functionen der p_i und q_i und ferner b eine gegebene Functionen der $a_1, a_2, \dots, a_m$, welche die p_i und q_i ausserdem nicht explicite enthält. Dann ist:

$$\begin{aligned} (a_\lambda, b) &= \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial a_\lambda}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial b}{\partial q_i} - \frac{\partial a_\lambda}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial b}{\partial p_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} \left[\frac{\partial a_\lambda}{\partial p_i} \left(\frac{\partial b}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial a_1}{\partial q_i} + \frac{\partial b}{\partial a_2} \cdot \frac{\partial a_2}{\partial q_i} + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial a_\lambda}{\partial q_i} \left(\frac{\partial b}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial a_1}{\partial p_i} + \frac{\partial b}{\partial a_2} \cdot \frac{\partial a_2}{\partial p_i} + \dots \right) \right], \end{aligned}$$

also:

$$1) \quad (a_\lambda, b) = (a_\lambda, a_1) \cdot \frac{\partial b}{\partial a_1} + (a_\lambda, a_2) \cdot \frac{\partial b}{\partial a_2} + \cdots + (a_\lambda, a_m) \cdot \frac{\partial b}{\partial a_m}.$$

Ist ferner b_1 eine denselben Bedingungen wie b genügende Function der a , so folgt ebenso:

$$2) \quad (b, b_1) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} \sum_{\mu=1}^{\mu=m} (a_\lambda, a_\mu) \cdot \frac{\partial b}{\partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial b_1}{\partial a_\mu}.$$

Nach diesen Vorbereitungen, welche beweisen, dass man die POISSON'sche Verbindung von „Functionen von Functionen“ sofort auf diejenigen der ersten Functionen zurückführen kann, nehmen wir an, es sei α_1 eine beliebig gegebene Function der p_i und q_i . Dann lässt sich eine andere Function β_1 der p_i so bestimmen, dass:

$$3) \quad (\alpha_1, \beta_1) = 1.$$

Denn diese Gleichung wird in Bezug auf β_1 eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit den p_i und q_i als unabhängigen Variablen und kann man daher bei der Bestimmung von β_1 die volle Willkür der Theorie dieser Gleichungen walten lassen. Es sei nun β_1 auf irgend eine Weise fest bestimmt.

Die partielle Differentialgleichung:

$$4) \quad (\alpha_1, b) = 0$$

für eine dritte Function b hat $(2n - 1)$ unabhängige Integrale, und ist dann das allgemeine Integral eine willkürliche Function derselben. Als eines dieser Integrale kann man α_1 selbst wählen, da identisch $(\alpha_1, \alpha_1) = 0$. Es seien $b_1, b_2, \dots, b_{2n-2}$ die $(2n - 2)$ übrigen unabhängigen Integrale von 4). Setzen wir in die Fundamentalrelation 20), § 10, für f, φ, ψ die Functionen α_1, β_1, b , so erhalten wir sofort (wegen 3 und 4):

$$5) \quad (\alpha_1, (\beta_1, b)) = 0,$$

d. h. (β_1, b) ist auch ein Integral der partiellen Differentialgleichung 4) für b . Die $(2n - 2)$ Ausdrücke $(\beta_1, b_1) \dots (\beta_1, b_{2n-2})$ hängen also lediglich von $\alpha_1, b_1, \dots, b_{2n-2}$ ab. Es sei c eine beliebige Function dieser $(2n - 1)$ Elemente. Dann folgt aus 1):

$$6) \quad (\beta_1, c) = -\frac{\partial c}{\partial \alpha_1} + (\beta_1, b_1) \cdot \frac{\partial c}{\partial b_1} + \cdots + (\beta_1, b_{2n-2}) \cdot \frac{\partial c}{\partial b_{2n-2}}.$$

Da die Coefficienten nur Functionen von α_1 und $b_1, \dots, b_n$ sind, so ist die Gleichung

$$7) \quad (\beta_1, c) = 0$$

eine partielle Differentialgleichung für c mit $\alpha_1, b_1, \dots, b_{2n-2}$ als unabhängigen Variablen. Dieselbe hat $2n - 2$ unabhängige Integrale: $c_1, c_2, \dots, c_{2n-2}$. Weil sie nur Functionen von $\alpha_1, b_1, \dots, b_{2n-2}$ sind, erfüllen sie auch die Gleichung:

$$8) \quad (\alpha_1, c) = 0.$$

Die $2n - 2$ Functionen $c_1, c_2, \dots, c_{2n-2}$ haben nun die Eigenschaft, dass irgend eine Verbindung (c_λ, c_μ) nur von ihnen selbst abhängt. Sie bilden also nach LIE eine Gruppe. Dies lässt sich leicht folgendermaassen beweisen:

Da $\alpha_1, \beta_1, c_1, \dots, c_{2n-2}$ $2n$ Functionen von p_i, q_i sind, zwischen welchen keine identische Relation stattfindet, so kann jede andere Function der p_i und q_i , also auch (c_λ, c_μ) , durch diese ersteren ausgedrückt werden. Weil (c_λ, c_μ) aber der Bedingung $(\beta_1, (c_\lambda, c_\mu)) = 0$ genügt, darf es nicht α_1 enthalten und weil es der ferneren Bedingung $(\alpha_1, (c_\lambda, c_\mu))$ genügt, darf es nicht β_1 enthalten. (c_λ, c_μ) ist also, wie behauptet, nur eine Function der c selbst.

Unter den c greifen wir wieder eins heraus, etwa c_1 , und nennen es α_2 . Ist dann β_2 eine Function der c , so stellt die Gleichung:

$$9) \quad (\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_2, c_2) \cdot \frac{\partial \beta_2}{\partial c_2} + (\alpha_2, c_3) \cdot \frac{\partial \beta_2}{\partial c_3} \dots = 1$$

eine partielle Differentialgleichung für β_2 mit $\alpha_2, c_2, \dots, c_{2n-2}$ als unabhängigen Variablen vor und es sei β_2 irgend ein Integral derselben. Von der Differentialgleichung:

$$10) \quad (\alpha_2, d) = (\alpha_2, c_2) \cdot \frac{\partial d}{\partial c_2} + \dots = 0$$

dagegen, welche ausser $d = \alpha_2$ noch $(2n - 4)$ unabhängige Integrale hat, wollen wir alle wählen und sie mit $d_1, \dots, d_{2n-4}$ bezeichnen. Wegen 9) und 10) folgt wieder nach 20), § 10, dass die (β_2, d) nur von $\alpha_2, d_1, \dots, d_{2n-4}$ abhängen. Stellt also e eine Function von $\alpha_2, d_1, \dots, d_{2n-4}$ dar, so ist die Gleichung:

$$11) \quad 0 = (\beta_1, e) = -\frac{\partial e}{\partial \alpha_2} + (\beta_1, d_1) \cdot \frac{\partial e}{\partial d_1} \dots + (\beta_1, d_{2n-4}) \cdot \frac{\partial e}{\partial d_{2n-4}}$$

eine partielle Differentialgleichung für e mit $\alpha_2, d_1, \dots, d_{2n-4}$ als unabhängigen Variablen, welche $(2n - 4)$ unabhängige Integrale $e_1, \dots, e_{2n-4}$ besitzt. Weil $\alpha_2, \beta_2, e_1, \dots, e_{2n-4}$ Functionen von $c_1, \dots, c_{2n-4}$ sind, erfüllen sie ebenfalls die Gleichungen 7) und 8). Es ist also:

$$(\alpha_1, \alpha_2) = (\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1, \beta_2) = (\alpha_2, \beta_1) = 0$$

und:

$$(\alpha_1, e_\lambda) = (\beta_1, e_\lambda) = 0.$$

Die e bilden nun ebenso eine Gruppe, wie vorhin die c , d. h. eine Verbindung (e_λ, e_μ) ist eine reine Function der e . Denn denkt man sich dieselbe zunächst als Function der p_i und q_i dargestellt, und dann diese durch die $2n$ Functionen $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, e_1, \dots, e_{2n}$ ersetzt, so darf die Verbindung (e_λ, e_μ) der Gleichungen

$$(\alpha_1, (e_\lambda, e_\mu)) = (\alpha_2, (e_\lambda, e_\mu)) = (\beta_1, (e_\lambda, e_\mu)) = (\beta_2, (e_\lambda, e_\mu)) = 0$$

wegen weder β_1 , noch β_2 , noch α_1 , noch α_2 enthalten.

Es ist klar, dass man diesen Process, den wir hier bereits durch 2 Stufen verfolgt haben, ungehindert immer weiter führen kann. Man gelangt immer wieder zu neuen partiellen Differentialgleichungen mit immer weniger unabhängigen Variablen und man ist bei der Wahl der Integrale niemals einer Beschränkung unterworfen. Führt man ihn zu Ende, so erreicht man folgendes Resultat.

Ist α_1 irgend eine gegebene Function der p_i und q_i , so kann man auf unendlich viele Arten $(2n - 1)$ andere Functionen $\alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ bestimmen, dass:

$$12) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\alpha_\lambda, \beta_\lambda) = 1 \\ (\alpha_\lambda, \beta_\mu) = 0 \quad (\lambda \geq \mu) \\ (\alpha_\lambda, \alpha_\mu) = 0 \\ (\beta_\lambda, \beta_\mu) = 0. \end{array} \right.$$

Der eigentliche Kern der Entwicklung besteht nun darin, dass die Gleichungen 12) $n \cdot (2n - 1)$ simultane partielle Differentialgleichungen zwischen den $2n$ Functionen α und β bilden. Man weiss nun, dass, wenn zwischen $2n$ Functionen von $2n$ Variablen mehr als $2n - 1$ partielle Differentialgleichungen gegeben sind, bestimmte Bedingungen zu deren Zusammenbestehen erfüllt sein müssen. Diese Bedingungen sind hier in der That erfüllt und zwar so, dass die Lösung den grössten Grad von Allgemeinheit besitzt, welche überhaupt mit einem System von $n(2n - 1)$ Differentialgleichungen vereinbar ist. Denn wir sind bei der Integration der successive auftretenden partiellen Differentialgleichungen, in welche die gegebenen durch Einführung neuer und neuer Variablen übergangen, in keiner Weise beschränkt worden. Diese Erscheinung, welche auch auf anderen Gebieten sich zeigt, wie z. B. in der Theorie derjenigen par-

tiellen Differentialgleichungen, welche der Invariantentheorie zu Grunde liegen*), verdient die grösste Beachtung.

Uebrigens liegt eine Lösung der Gleichungen 12) ohne Weiteres zu Tage. Sie wird erhalten, wenn man $\alpha_\lambda = p_\lambda$, $\beta_\lambda = q_\lambda$ ($\lambda = 1, 2, \dots n$) setzt.

Man kann diese Untersuchungen nun sofort auf die Integrale der Differentialgleichungen 9), § 10, anwenden, wenn man formell noch eine neue Variable τ einführt, welche mit den p_i , q_i und t zusammen $2n + 2$ Variable bildet und setzt:

$$H' = H + \tau,$$

so dass also in H nur die p_i , q_i und t enthalten sind. Führt man noch die Bezeichnungen $t = q_0$, $\tau = p_0$ ein und betrachtet H' als die in 3) beliebig angenommene Function α_1 der p und q , so geht die partielle Differentialgleichung 3) über in:

$$\begin{aligned} 1 = (H', A) &= \sum_{i=0}^{i=n} \left(\frac{\partial H'}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial A}{\partial q_i} - \frac{\partial H'}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial A}{\partial p_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial A}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial A}{\partial p_i} \right) - \frac{\partial H}{\partial t} \cdot \frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{\partial A}{\partial t}, \end{aligned}$$

welche die p und q als unabhängige Variable und A als abhängige besitzt. Sie wird sofort erfüllt für $A = t = q_0$.

Die Gleichung:

$$0 = (H', a)$$

hat $(2n + 1)$ von einander unabhängige Lösungen. Die eine derselben ist H' selbst und die übrigen $2n$ kann man so wählen, dass sie sämmtlich von τ unabhängig sind. Denn setzt man $\frac{\partial a}{\partial \tau} = 0$, so geht die Differentialgleichung $0 = (a, H')$ über in:

$$13) \quad 0 = (a, H) + \frac{\partial a}{\partial t}.$$

Diese Gleichung ist widerspruchlos, weil in ihren Coefficienten das Element τ nicht enthalten ist. Sie ist aber genau wieder die alte Gleichung 19), § 10, welche die $2n$ Integrale des Systems 9) definirt. Für den angegebenen Werth von A ist ausserdem auf der Stelle:

$$0 = (A, a) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\partial A}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial a}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial a}{\partial p_i}.$$

*) Vergl. ARONHOLD: Ueber eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie. Berlin 1863.

Wir wollen, um den Nerv der Betrachtung ganz deutlich hervortreten zu lassen, noch für einen Augenblick $H' = \alpha_0$, $A = t = \beta_0$ setzen, so dass $(\alpha_0, \beta_0) = 1$ und allgemein $(\alpha_0, a) = (\beta_0, a) = 0$.

Hieraus folgt endlich:

Nimmt man ein System von $2(n+1)$ Variablen p_i, q_i , ($i = 0, \dots, n$) an und bestimmt $2(n+1)$ Functionen $\alpha_0, \dots, \alpha_n, \beta_0, \dots, \beta_n$ so, dass sie den Bedingungen 12) genügen, so kann man zunächst im Speciellen $\alpha_0 = H' = H + p_0$, $\beta_0 = q_0$ setzen, worin H von q_0 unabhängig, sonst aber eine willkürliche Function der p und q ist. Es wird dann die Gleichung $(\alpha_0, \beta_0) = 1$ von selbst erfüllt. Die übrigen Functionen $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ kann man dann so wählen, dass sie von β_0 unabhängig werden. In den Verbindungen $(\alpha_\lambda, \beta_\mu)$ dieser $2n$ Functionen treten dann die Differentialquotienten nach p_0 und q_0 nicht auf. Setzt man endlich noch $p_0 = \tau$, $q_0 = t$, so genügen die $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ der partiellen Differentialgleichung 19), § 10, für a . Sie sind also Integrale des Systems 9), § 10, welche den Bedingungen 12) dieses Paragraphen genügen.

Die LAGRANGE'schen Verbindungen $[a_\lambda, a_\mu]$ ergeben sich übrigens der Gleichungen 54) und 55) mit Rücksicht auf 64) und 65), § 10, wegen in der Gestalt:

$$14) \quad \begin{cases} [\alpha_\lambda, \beta_\lambda] = 1, \\ [\alpha_\lambda, \beta_\mu] = 0 \quad (\lambda \geq \mu), \\ [\alpha_\lambda, \alpha_\mu] = [\beta_\lambda, \beta_\mu] = 0. \end{cases}$$

Wir wollen von jetzt an die $2n$ Integrale $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$, welche den Bedingungen 12) genügen, ein System kanonischer Integrale, oder auch, da diese mit der Zeit t sich nicht ändern, ein System kanonischer Integrationsconstanten nennen. Unter diesen giebt es eins von ausserordentlicher Einfachheit, welches man erhält, wenn man $\alpha_i = p_i'$, $\beta_i = q_i'$ setzt, wo p_i' und q_i' diejenigen Werthe (Anfangswerthe) von p_i und q_i bedeuten, welche diese letzteren für einen bestimmten Zeitpunkt t' der Zeit t annehmen. Die Gleichungen 14), § 10, werden hier:

$$15) \quad \begin{cases} p_i = p_i(p_1' \dots p_n', q_1' \dots q_n', t, t') \\ q_i = q_i(p_1' \dots p_n', q_1' \dots q_n', t, t') \end{cases}$$

und ihre Auflösungen 15), § 10, nach den p_i', q_i' :

$$16) \quad \begin{cases} p_i' = p_i'(p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n, t', t) \\ q_i' = q_i'(p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n, t', t), \end{cases}$$

und müssen dieselben unmittelbar aus 15) durch einfache Vertauschung der gestrichelten mit den ungestrichelten Buchstaben folgen. Setzt man in 15) oder 16) $t = t'$, so müssen sie nach der gemachten Annahme identisch übergehen in:

$$17) \quad p_i = p'_i, \quad q_i = q'_i, \quad \text{resp.} \quad p'_i = p_i, \quad q'_i = q_i.$$

In den Poisson'schen Ausdrücken (a, b) hat man nun für a und b zwei der Functionen zu setzen, welche auf den rechten Seiten der Gleichungen 16) stehen. Weil sie von t unabhängig sind und in (a, b) Differentialquotienten nach t nicht vorkommen, kann man schon vor der Differentiation für t irgend einen Werth, z. B. t' setzen. Dann gehen aber die Functionen p'_i, q'_i direct in p_i und q_i über und man findet dann auf der Stelle:

$$18) \quad \begin{cases} (p'_\lambda, q'_\lambda) = 1, \\ (p'_\lambda, q'_\mu) = 0, \quad (\lambda \geq \mu), \\ (p'_\lambda, p'_\mu) = (q'_\lambda, q'_\mu) = 0, \end{cases}$$

also die Bedingungen für ein kanonisches System.

Schliesslich wollen wir noch die offen gelassene Frage beantworten, ob zwei Integrale a und b mit Hilfe der wiederholten Anwendung des Poisson'schen Satzes nach und nach alle Integrale liefern können. Das eine a können wir ohne Weiteres $= \alpha_1$ annehmen. Das andere b ist dann eine Function der α_i und β_i und die Gleichung 1) ergibt sofort:

$$19) \quad \begin{cases} (a, b) = \frac{\partial b}{\partial \beta_1}, \quad \text{folglich:} \\ (a, (a, b)) = \frac{\partial^2 b}{\partial \beta_1^2}, \\ (a, (a, (a, b))) = \frac{\partial^3 b}{\partial \beta_1^3}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Wenn also b , als Function von β_1 angesehen, keiner Differentialgleichung $(2n - 2)^{\text{ter}}$ oder niedrigerer Ordnung genügt, welche nur α_1 und b in ihren Coefficienten enthält, so folgen aus 19) $2n - 2$ neue Integrale, welche mit a und b zusammen die nothwendige Anzahl bilden. Giebt es aber eine solche Differentialgleichung, so kann die Combination mit b die noch fehlenden Integrale ergänzen, oder auch nicht. Jedenfalls ergibt sich die Möglichkeit, und noch mehr, es ergibt sich als allgemeiner Fall, dass zwei Integrale alle übrigen

bestimmen, wenn es auch nicht von vornherein evident ist, wann ein Ausnahmefall eintritt. In diesem Sinne sind auch die Worte JACOBI's aufzufassen, welche in seinen Vorlesungen über Mechanik (Werke, Supplementband S. 269) stehen:

„Dass die Wichtigkeit dieses (des POISSON'schen) seit so langer Zeit entdeckten Satzes Niemand erkannt hat, dazu hat ein eigenthümlicher Umstand beigetragen. Die Fälle, in welchen man denselben anwandte, waren nämlich gerade solche, in welchen der neu gebildete Ausdruck kein neues Integral gab, sondern wo der resultirende Ausdruck identisch $= 0$ oder $=$ einer von 0 verschiedenen Zahl, etwa $= 1$ wurde. Diese Fälle, welche in der allgemeinen Theorie als Ausnahmefälle erscheinen, sind in der Praxis überhaupt sehr häufig. Damit nämlich ein Integral, mit einem zweiten combinirt, nach und nach alle Integrale liefere, muss es ein solches sein, welches dem besonderen Problem angehört. Aber die ersten Integrale, welche für ein vorgelegtes Problem gefunden werden, sind in der Regel diejenigen, welche aus allgemeinen Principien (z. B. der Erhaltung der Flächen) folgern, mithin dem besonderen Problem nicht eigenthümlich angehören. Daher kann man nicht verlangen, dass aus ihnen alle Integrale abgeleitet werden sollen.“

Es ist aber wohl zu beachten, dass selbst, wenn dieses Integral dem speciellen Problem eigenthümlich angehört, es dennoch nicht alle Integrale zu liefern braucht, wenn dies auch im Allgemeinen geschieht.

§ 13.

Die kanonischen Constanten für die elliptische Bewegung eines Planeten um die Sonne.

Die im vorigen Paragraphen erläuterten Principien wollen wir jetzt anwenden, um an Stelle der in 15), § 2 eingeführten Elemente $a, e, \Omega, i, \pi, \varepsilon$ ein System von sechs anderen aufzustellen, welches kanonisch ist. Betrachtet man die Determinante 22, § 11, so sieht man, dass die Verbindung von a mit den übrigen Elementen 0 ergibt, mit Ausnahme von ε und es ist:

$$(a, \varepsilon) = -2 \sqrt{\frac{a}{\mu}}.$$

a , die grosse Achse, ist bestimmt worden durch die Gleichung:

$$\frac{1}{2} \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dt^2} - \frac{\mu}{r} = - \frac{\mu}{2a}.$$

Setzt man also:

$$1) \quad \alpha_1 = -\frac{\mu}{2a},$$

so ist:

$$(\alpha_1, \varepsilon) = (a, \varepsilon) \cdot \frac{\partial \alpha_1}{\partial a} = -\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

und:

$$\left(\alpha_1, -\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}} \right) = 1.$$

Für β_1 kann man daher ohne Weiteres $-\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}} = -\frac{\varepsilon}{n}$ wählen.

Wir wollen aber statt dessen die Zeit t_0 des Perihels wählen, welche nach 20), § 2, durch die Gleichung bestimmt ist:

$$2) \quad t_0 = -\frac{\varepsilon}{n} + \frac{\pi}{n} = \beta_1,$$

$$(\alpha_1, \beta_1) = \left(\alpha_1, -\frac{\varepsilon}{n} \right) + \left(\alpha_1, \frac{\pi}{n} \right) = 1,$$

und:

$$(\alpha_1, \Omega) = (\alpha_1, i) = (\alpha_1, \pi) = (\alpha_1, \varepsilon) = 0,$$

ferner ergibt sich mit Anwendung der Tabelle 22), § 11:

$$(\beta_1, \Omega) = \left(-\frac{\varepsilon}{n}, \Omega \right) + \left(\frac{\pi}{n}, \Omega \right) = \frac{1}{n} ((-\varepsilon, \Omega) + (\pi, \Omega)) = 0,$$

$$(\beta_1, i) = \frac{1}{n} [(-\varepsilon, i) + (\pi, i)] = 0,$$

$$(\beta_1, \pi) = \frac{1}{n} [(-\varepsilon, \pi) + (\pi, \pi)] = 0,$$

$$(\beta_1, e) = \frac{1}{n} [(-\varepsilon, e) + (\pi, e)] = -\frac{a \cdot (1 - e^2)}{e\mu}.$$

Ist also b irgend eine Function von $\alpha_1, e, \Omega, i, \pi$ mit Ausschluss von β_1 , so folgt aus § 12, 1):

$$(\beta_1, b) = -\frac{\partial b}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial b}{\partial e} \cdot \frac{a \cdot (1 - e^2)}{e\mu} = -\frac{\partial b}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial b}{\partial e} \cdot \frac{(1 - e^2)}{2e\alpha_1}.$$

Die partielle Differentialgleichung $(\beta_1, b) = 0$ für b als gesuchte Function, $\alpha, e, \Omega, i, \pi$ als unabhängige Variable hat somit die vier unabhängigen Integrale:

$$b_1 = \frac{1 - e^2}{\alpha_1} = - \frac{2a(1 - e^2)}{\mu}, \quad b_2 = \Omega, \quad b_3 = i, \quad b_4 = \pi.$$

Statt α_2 könnte man ohne Weiteres b_1 nehmen. Indessen wollen wir lieber das Moment der Geschwindigkeit, welches $= \sqrt{\mu \cdot a(1 - e^2)}$ $= \sqrt{\mu \cdot \left(-\frac{b_1}{2}\right)}$ wählen, also setzen:

$$3) \quad \alpha_2 = \sqrt{\mu \cdot a(1 - e^2)} = \sqrt{\mu \cdot p}.$$

Die Anwendung von 19), § 11, liefert wieder:

$$(\alpha_2, \Omega) = 0, \quad (\alpha_2, i) = 0, \quad (\alpha_2, \pi) = -1.$$

Man könnte also $\beta_2 = -\pi$ setzen. Wir wollen aber wählen:

$$4) \quad \beta_2 = \Omega - \pi,$$

d. h. den Winkel, welchen der aufsteigende Knoten mit dem Perihelium bildet.

Es wird:

$$\begin{aligned} (\alpha_2, \beta_2) &= 1, \\ (\beta_2, \Omega) &= 0, \quad (\beta_2, i) = - \frac{\cos i}{\sin i \sqrt{\mu \cdot a(1 - e^2)}} = - \frac{\cos i}{\sin i \alpha_2}. \end{aligned}$$

Ist also c eine Function von α_2, Ω, i , so ergibt sich:

$$(\beta_2, c) = - \frac{\partial c}{\partial \alpha_2} - \frac{\cos i}{\sin i \alpha_2} \cdot \frac{\partial c}{\partial i}.$$

Die Gleichung $(\beta_2, c) = 0$ hat als partielle Differentialgleichung für c mit α_2, Ω, i als unabhängigen Variablen betrachtet die beiden unabhängigen Integrale:

$$c_1 = \Omega, \quad c_2 = \alpha_2 \cdot \cos i = \sqrt{\mu \cdot a(1 - e^2)} \cdot \cos i.$$

Ferner ist:

$$(c_1, c_2) = 1,$$

so dass man sofort setzen kann:

$$5) \quad \alpha_3 = \Omega,$$

$$6) \quad \beta_3 = \sqrt{\mu \cdot a(1 - e^2)} \cdot \cos i.$$

Wir haben also schliesslich ein kanonisches System gefunden, welches mit dem ursprünglichen durch die Gleichung zusammenhängt:

$$7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_1 = -\frac{\mu}{2a}, & \beta_1 = t_0 = -\frac{\varepsilon}{n} + \frac{\pi}{n}, \\ \alpha_2 = \sqrt{\mu \cdot a(1 - e^2)}, & \beta_2 = \Omega - \pi, \\ \alpha_3 = \Omega, & \beta_3 = \sqrt{\mu \cdot a(1 - e^2)} \cdot \cos i. \end{array} \right.$$

Durch Einführung des Systems 7) wird also:

$$(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_3, \beta_3) = 1,$$

während alle übrigen POISSON'schen Verbindungen zwischen den α und β als Resultat 0 ergeben.

Wie wir bewiesen, ist das System 7) nicht das einzige, welches man aufstellen kann; es ist aber insofern das einfachste, als die neuen Constanten durch sehr einfache Relationen aus den alten abgeleitet worden sind.

§ 14.

Die Eigenschaften der Involutionssysteme.

Wir haben im § 12 gesehen, dass, wenn $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$, $2n$ unabhängige Variable bedeuten, man auf unendlich viele Weisen $2n$ Functionen $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ so bestimmen kann, dass:

- 1) $(\alpha_\lambda, \beta_\lambda) = 1,$
- 2) $(\alpha_\lambda, \beta_\mu) = 0, \quad (\lambda \geq \mu),$
- 3) $(\alpha_\lambda, \alpha_\mu) = (\beta_\lambda, \beta_\mu) = 0.$

Ein solches System wollen wir jetzt nach LIE kurz als ein Involutionssystem bezeichnen.

Die simultanen partiellen Differentialgleichungen 1), 2), 3), an Zahl $= n(2n - 1)$, sind als Definition eines Involutionssystems anzusehen und aus ihnen werden wir jetzt weitere Eigenschaften desselben entwickeln.

Die Functionaldeterminante wird hier:

$$4) \quad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_n} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \alpha_n}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \alpha_n}{\partial p_n} & \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \beta_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \beta_1}{\partial p_n} & \frac{\partial \beta_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \beta_1}{\partial q_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \beta_n}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \beta_n}{\partial p_n} & \frac{\partial \beta_n}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \beta_n}{\partial q_n} \end{vmatrix}$$

Aus den Gleichungen 1—3 fließt nun eine Reihe sehr merkwürdiger Eigenschaften dieser Determinante, welche, wenn man die

$(2n)^2$ Differentialquotienten — ganz von ihrer Bedeutung als Differentialquotienten abgesehen — als selbstständige Elemente betrachtet, die den $n(2n-1)$ Bedingungsgleichungen 1—3 genügen, eine unverkennbare Aehnlichkeit mit den Eigenschaften der Determinante einer orthogonalen Substitution besitzen. Während für die letztere die Combination irgend zweier Vertikalreihen oder Horizontalreihen 0 oder 1 ergibt, je nachdem diese Reihen verschieden oder nicht verschieden sind, findet etwas ähnliches zwischen der Determinante D und der Determinante:

$$5) \quad D' = \begin{vmatrix} \frac{\partial \beta_1}{\partial q_1} \dots \dots \frac{\partial \beta_1}{\partial q_n}, & -\frac{\partial \beta_1}{\partial p_1} \dots \dots -\frac{\partial \beta_1}{\partial p_n} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \beta_n}{\partial q_1} \dots \dots \frac{\partial \beta_n}{\partial q_n}, & -\frac{\partial \beta_n}{\partial p_1} \dots \dots -\frac{\partial \beta_n}{\partial p_n} \\ -\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_1} \dots \dots -\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_n}, & \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_1} \dots \dots \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_n} \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{\partial \alpha_n}{\partial q_1} \dots \dots -\frac{\partial \alpha_n}{\partial q_n}, & \frac{\partial \alpha_n}{\partial p_1} \dots \dots \frac{\partial \alpha_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

welche aus D durch Vertauschung der letzten n Horizontal- und Vertikalreihen mit den entsprechenden, mit negativen Vorzeichen genommenen ersten n Horizontal- und Vertikalreihen entstanden ist, statt. Die Combination einer Horizontalreihe von 4) mit einer Horizontalreihe von 5) ergibt nämlich nach 2) und 3) 0, wenn sie sich nicht entsprechen, dagegen findet man ± 1 , wenn man gleichvielte Horizontalreihen combinirt.

Es ist also sofort:

$$D \cdot D' = D^2 = 1, \text{ folglich:}$$

$$6) \quad D = \pm 1.$$

Die Analogie geht aber noch weiter.

Löst man die $2n$ Gleichungen:

$$7) \quad \begin{cases} \alpha_i = \alpha_i(p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n), \\ \beta_i = \beta_i(p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n), \end{cases}$$

nach den p und q auf:

$$8) \quad \begin{cases} p_i = p_i(\alpha_1 \dots \alpha_n, \beta_1 \dots \beta_n), \\ q_i = q_i(\alpha_1 \dots \alpha_n, \beta_1 \dots \beta_n), \end{cases}$$

und stellt die Functionaldeterminante von 8) in den beiden Formen dar:

$$9) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} \dots\dots, & \frac{\partial q_1}{\partial \alpha_1} \dots\dots \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial p_1}{\partial \beta_1} \dots\dots, & \frac{\partial q_1}{\partial \beta_1} \dots\dots \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

$$10) \quad \Delta' = \begin{vmatrix} + \frac{\partial q_1}{\partial \beta_1} \dots\dots, & - \frac{\partial p_1}{\partial \beta_1} \dots\dots, \\ \vdots & \vdots \\ - \frac{\partial q_1}{\partial \alpha_1} \dots\dots, & + \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} \dots\dots, \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

so sind nach § 12 Δ und Δ' die conjugirten Determinanten von beziehungsweise D und D' . Es lässt sich nun beweisen, dass D identisch mit Δ' und D' identisch mit Δ ist, d. h., dass:

$$11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p_\lambda}{\partial \alpha_\mu} = \frac{\partial \beta_\mu}{\partial q_\lambda} \\ \frac{\partial p_\lambda}{\partial \beta_\mu} = - \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial q_\lambda} \\ \frac{\partial q_\lambda}{\partial \alpha_\mu} = - \frac{\partial \beta_\mu}{\partial p_\lambda} \\ \frac{\partial q_\lambda}{\partial \beta_\mu} = \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial p_\lambda} \end{array} \right\} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots n).$$

Dies folgt unmittelbar aus den Gleichungen 59), § 10, wenn man in denselben die Substitutionen 63—64) macht, statt der a die α resp. β setzt und die Gleichungen 1—3 berücksichtigt.

Determinanten wie D , deren Elemente den Gleichungen 1—3 genügen, nennt man kanonische Determinanten. Sie treten auch in anderen Problemen auf*). Aus dem System 11) ergibt sich eine ausserordentlich wichtige Folgerung.

*) Vergl. CLEBSCH und GORDAN: Abel'sche Functionen, S. 300.

Es ist nämlich, wenn P_1 und P_2 für einen Augenblick irgend zwei der p und q bezeichnen, der Ausdruck:

$$\frac{\partial P_1}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \alpha_1}{\partial P_2} + \frac{\partial P_1}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial \alpha_2}{\partial P_2} + \dots + \frac{\partial P_1}{\partial \beta_1} \cdot \frac{\partial \beta_1}{\partial P_2} + \dots$$

entweder $= 0$ oder $= 1$, je nachdem P_1 und P_2 von einander verschieden oder einander gleich sind. Setzt man in dieselben für die Differentialquotienten der α und β ihre Werthe aus 11), so erhält man sofort:

$$12) \quad \begin{cases} (p_\lambda, q_\lambda) = 1, \\ (p_\lambda, q_\mu) = 0, \quad \lambda \gtrless \mu, \\ (p_\lambda, p_\mu) = (q_\lambda, q_\mu) = 0, \end{cases}$$

wo die Poisson'schen Ausdrücke 12) aus den früheren durch unmittelbare Vertauschung der α und β mit resp. p und q entstehen. Hieraus folgt das wichtige Resultat:

Durch Auflösung eines Involutionssystems nach den ursprünglichen Variablen erhält man wieder ein Involutionssystem.

Schliesslich wollen wir noch folgenden Satz ableiten:

Ist ein Involutionssystem α_i, β_i der ursprünglichen Variablen p_i, q_i gegeben und bildet man ein zweites Involutionssystem A_i, B_i der α_i, β_i , so ist dasselbe zugleich ein Involutionssystem der p_i und q_i , wenn man die Ausdrücke der α_i, β_i durch die p_i, q_i einsetzt.

Dies folgt unmittelbar aus der Gleichung 2), § 12: Bezeichnet man mit $(A_\lambda, B_\mu)_{\alpha, \beta}$ den Poisson'schen Ausdruck, wenn man α, β als unabhängige Variable ansieht und mit $(A_\lambda, B_\mu)_{p, q}$ denjenigen, für welchen p und q diese Rolle spielen, so folgt sofort aus dieser Gleichung:

$$13) \quad (A_\lambda, B_\mu)_{\alpha, \beta} = (A_\lambda, B_\mu)_{p, q},$$

womit der Satz bewiesen ist.

Aus der Gleichung 13) ergibt sich noch folgendes allgemeinere Resultat: Die Poisson'sche Verbindung irgend zweier Functionen a_1, a_2 der p_i, q_i , nämlich:

$$\sum \left(\frac{\partial a_1}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial a_2}{\partial q_i} - \frac{\partial a_1}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial a_2}{\partial p_i} \right)$$

bleibt ihrer Form nach unverändert, wenn man auf die p_i, q_i eine kanonische Substitution anwendet.

Nach diesen Vorbereitungen schreiten wir zu der Aufgabe, die partiellen Differentialgleichungen (1—3) vollständig zu integrieren, d. h. die allgemeinste Form des kanonischen Systems zu bestimmen:

Zu diesem Zweck wollen wir vorläufig erst die n Functionen

$$14) \quad \alpha_i = \alpha_i(p_1, p_2 \dots p_n, q_1, q_2, \dots q_n), \quad (i = 1, 2, \dots n)$$

und die zwischen ihnen stattfindenden $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ partiellen Differentialgleichungen:

$$15) \quad (\alpha_\lambda, \alpha_\mu) = 0$$

betrachten. Diesen Gleichungen kann man die Deutung geben, dass sie die Bedingung darstellen, unter welcher das Product der beiden Determinanten:

$$16) \quad D_{\alpha,p} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \alpha_n}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \alpha_n}{\partial p_n} \end{vmatrix} \quad D_{\alpha,q} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_n} \end{vmatrix}$$

eine symmetrische Determinante wird, wenn man die Horizontalreihen combinirt. Wir wollen der Kürze wegen setzen:

$$\frac{\partial \alpha_\lambda}{\partial p_\mu} = p_{\lambda,\mu}, \quad \frac{\partial \alpha_\lambda}{\partial q_\mu} = q_{\lambda,\mu}.$$

Die Determinanten $D_{\alpha,p}$, $D_{\alpha,q}$ gehen dann über in:

$$17) \quad D_{\alpha,p} = \begin{vmatrix} p_{1,1} & \dots & p_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \dots & p_{n,n} \end{vmatrix} \quad D_{\alpha,q} = \begin{vmatrix} q_{1,1} & \dots & q_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n,1} & \dots & q_{n,n} \end{vmatrix}$$

und die Gleichung 15) wird:

$$18) \quad \sum_i p_{\lambda,i} q_{\mu,i} = \sum_i p_{\mu,i} q_{\lambda,i}.$$

Wir wollen nun die Unterdeterminanten von 17) einführen und setzen:

$$P_{\lambda,\mu} = \frac{\partial D_{\alpha,p}}{\partial p_{\mu,\lambda}}, \quad Q_{\lambda,\mu} = \frac{\partial D_{\alpha,q}}{\partial q_{\mu,\lambda}},$$

und diese zu den Determinanten zusammenstellen:

$$19) \quad F_p = \begin{vmatrix} P_{1,1} & \dots & P_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{n,1} & \dots & P_{n,n} \end{vmatrix} \quad F_q = \begin{vmatrix} Q_{1,1} & \dots & Q_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{n,1} & \dots & Q_{n,n} \end{vmatrix}$$

Multipliziert man die Gleichung 18) mit $P_{r,\lambda} \cdot P_{\varrho,\mu}$, wo r und ϱ beliebige Indices (zwischen 1 und n) bedeuten, lässt λ und μ alle möglichen Werthe annehmen und summirt die entstehenden Gleichungen, so folgt:

$$\sum_{i,\lambda,\mu} p_{\lambda,i} q_{\mu,i} P_{r,\lambda} P_{\varrho,\mu} = \sum_{i,\lambda,\mu} p_{\mu,i} q_{\lambda,i} P_{r,\lambda} P_{\varrho,\mu}.$$

Jede der dreifachen Summen kann nun auf eine einfache Summe zurückgeführt werden. Summirt man links erst nach dem Index λ , so ergibt sich:

$$\sum_{i,\mu} (q_{\mu,i} \cdot P_{\varrho,\mu} \cdot \sum_{\lambda} p_{\lambda,i} \cdot P_{r,\lambda}).$$

Nun ist $\sum_{\lambda} p_{\lambda,i} P_{r,\lambda}$ entweder $= 1$ oder $= 0$, je nachdem $i = r$ oder nicht $= r$ ist. Die linke Seite der obigen Gleichung geht also über in:

$$\sum_{\mu} q_{\mu,r} \cdot P_{\varrho,\mu}.$$

In gleicher Weise findet man die rechte Seite, wenn man zunächst nach μ summirt:

$$= \sum_{\lambda} q_{\lambda,\varrho} \cdot P_{r,\varrho}.$$

Ersetzt man die beiden Summationsindices λ und μ endlich durch i , schreibt statt r und ϱ resp. λ und μ , so erhält man schliesslich:

$$20) \quad \sum_i q_{i,\lambda} \cdot P_{\mu,i} = \sum_i q_{i,\mu} \cdot P_{\lambda,i}$$

und hieraus folgt der interessante Determinantensatz:

Hat eine Determinante $(D_{\alpha,q})$ die Eigenschaft, dass ihr Product mit einer zweiten Determinante bei Combination der Horizontalreihen eine symmetrische Determinante bildet, so ergibt ihr Product mit der conjugirten Determinante der letzteren ebenfalls eine symmetrische Determinante, wenn man ihre Vertikalreihen mit den Horizontalreihen dieser conjugirten componirt.

Von diesem Satz können wir nun unmittelbar eine sehr folgenreiche Anwendung auf unser System von Differentialgleichungen machen. Betrachtet man in 14) die q nur als Parameter, so ist $D_{\alpha,p}$ eine Functionaldeterminante. Löst man nun 14) nach den p auf, so dass wir die p durch α und q ausgedrückt erhalten:

$$21) \quad p_i = p_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, q_1, \dots, q_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

so ist F_p die Functionaldeterminante des Systems 21) und also:

$$22) \quad P_{\lambda,\mu} = \left(\frac{\partial p_{\lambda}}{\partial \alpha_{\mu}} \right).$$

Die Differentialquotienten sind hier eingeklammert, um sie von den früher in 9) und 10) angewendeten, die von ihnen offenbar ganz verschieden sind, zu unterscheiden. Setzt man 14) in 21) ein, so muss identisch $p_i = p_i$ resultiren. Differentiirt man in diesem Sinne 21) nach einem Parameter q_i' , so folgt:

$$0 = \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_i'} \right) + \sum_{\lambda} \left(\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_{\lambda}} \right) \cdot \frac{\partial \alpha_{\lambda}}{\partial q_i'}.$$

Vertauscht man die beiden Indices i und i' , so ergibt sich ebenso:

$$0 = \left(\frac{\partial p_i'}{\partial q_i} \right) + \sum_{\lambda} \left(\frac{\partial p_i'}{\partial \alpha_{\lambda}} \right) \cdot \frac{\partial \alpha_{\lambda}}{\partial q_i}.$$

Die Summen in diesen beiden Gleichungen sind nun nach 20) einander gleich. Es folgt also:

$$23) \quad \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_i'} \right) = \left(\frac{\partial p_i'}{\partial q_i} \right).$$

Diese Gleichungen sagen aus, dass die rechten Seiten von 21) die partiellen Differentialquotienten einer Function:

$$24) \quad V = V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, q_1, q_2, \dots, q_n),$$

nach den q sind, derart, dass:

$$25) \quad p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Da nun rückwärts aus den Gleichungen 23) die Gleichungen 15) folgen, so ergibt sich, dass die Gleichungen 15) die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen darstellen, damit die Auflösungen der Gleichungen 14) nach den p diese als partielle Differentialquotienten einer Function V nach den q ergeben.

Man hätte aber auch können die p mit den q vertauschen, d. h. in 14) die q entwickeln:

$$26) \quad q_i = q_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n, p_1, \dots, p_n),$$

und würde dann genau ebenso gefunden haben:

$$27) \quad q_i = \frac{\partial W}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Nun müssen offenbar die Gleichungen 26) die Umkehrungen von 25) sein und folgt daher das Resultat.

Bezeichnet man die partiellen Differentialquotienten einer Function V der $q_1, \dots, q_n$ mit $p_1, \dots, p_n$ und drückt umgekehrt die q

durch die p aus, so werden sie die partiellen Differentialquotienten einer Function W nach den p . Diese Function ist leicht zu bestimmen und beruht hierauf die sogenannte LEGENDRE'sche Substitution.

Löst man das erste System der Gleichungen 8) nach den β auf:

$$28) \quad \beta_i = \beta_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, p_1, \dots, p_n),$$

so giebt es der Gleichungen $(p_\lambda, p_\mu) = 0$ wegen eine Function:

$$29) \quad W' = W'(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, p_1, \dots, p_n)$$

derart, dass:

$$30) \quad \beta_i = \frac{\partial W'}{\partial \alpha_i}.$$

Man kann nun aber noch weiter gehen. Bildet man in 26) die Differentialquotienten $\left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_{i'}}\right)$, so sind dieselben die früheren Grössen $Q_{i'}, i$ und diese sind die Unterdeterminanten des Systems $D_{\alpha, q}$ in 19). Bildet man ferner in 28) die Differentialquotienten $\left(\frac{\partial \beta_{i'}}{\partial p_i}\right)$, so sind dieselben ebenso die Unterdeterminanten des Systems:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial p_n}{\partial \beta_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial p_1}{\partial \beta_n} & \dots & \frac{\partial p_n}{\partial \beta_n} \end{vmatrix}$$

Diese Determinante geht aber der Gleichungen 11) wegen sofort in $D_{\alpha, q}$ über, nur dass alle Elemente mit einem negativen Vorzeichen genommen werden müssen. Es ist daher:

$$\left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_{i'}}\right) = - \left(\frac{\partial \beta_{i'}}{\partial p_i}\right),$$

also wegen 27) und 30):

$$\frac{\partial^2 (W + W')}{\partial p_i \partial \alpha_{i'}} = 0 \quad (i, i' = 1, 2, \dots, n).$$

Es ist also $W + W'$ von der Form:

$$W + W' = \varphi_1(p_1, \dots, p_n) + \varphi_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

oder:

$$W - \varphi_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = - (W' - \varphi_1(p_1, \dots, p_n)).$$

Weil in 27) nur nach p differentiirt wird, kann man φ_2 von W subtrahiren. Entsprechendes gilt nach 30) für W' . Dann folgt:

$$31) \quad W' = -W$$

und sind wir damit zu dem Endresultat gelangt:

Sind α_i, β_i ein Involutionssystem der p_i und q_i :

$$32) \quad \begin{cases} \alpha_i = \alpha_i(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n), \\ \beta_i = \beta_i(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n), \end{cases}$$

und werden die β und q durch die α und p ausgedrückt, so erhält man:

$$33) \quad q_i = \frac{\partial W}{\partial p_i}, \quad \beta_i = -\frac{\partial W}{\partial q_i},$$

wo W eine Function der α und p bedeutet:

$$34) \quad W = W(\alpha_1, \dots, \alpha_n, p_1, \dots, p_n),$$

und umgekehrt ergeben die Gleichungen 33) ein Involutionssystem, wenn man dieselben nach den α_i und β_i als Unbekannten auflöst.

Hiermit ist die Integration der partiellen Differentialgleichungen 1—3 formell erledigt, insofern sie auf die Wahl einer beliebigen Function W und darauf auf eine reine Elimination zurückgeführt worden ist.

§ 15.

Kanonische Umformungen des kanonischen Systems von Differentialgleichungen.

Wir betrachten wieder das System:

$$1) \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

und wollen auf dasselbe eine sogen. Berührungstransformation der p_i, q_i in neue Variable P_i, Q_i anwenden:

$$2) \quad \begin{cases} P_i = P_i(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n), \\ Q_i = Q_i(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n), \end{cases}$$

$$3) \quad \begin{cases} p_i = p_i(P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n), \\ q_i = q_i(P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n), \end{cases}$$

wo 3) wieder die Auflösungen von 2) sind. Ihr Name stammt von geometrischen Untersuchungen her und besteht sie in der Anwendung eines Involutionssystemes, für welches

$$4) \quad (P_\lambda, Q_\lambda) = 1$$

und alle übrigen Poisson'schen Verbindungen $= 0$ sind. Aus 2) folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{dP_i}{dt} &= \sum_{\lambda} \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_{\lambda}} \cdot \frac{dp_{\lambda}}{dt} + \frac{\partial P_i}{\partial q_{\lambda}} \cdot \frac{dq_{\lambda}}{dt} \right) \\
&= \sum_{\lambda} \frac{\partial P_i}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_{\lambda}} - \frac{\partial P_i}{\partial q_{\lambda}} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} \\
&= (P_i, H).
\end{aligned}$$

Denkt man sich in H , welches eine gegebene Function der p_i, q_i ist, die Substitution 3) gemacht, so geht es in eine Function der P_i, Q_i über. In diesem Sinne folgt also aus dem Satz 1), § 12:

$$\begin{aligned}
(P_i, H) &= \frac{\partial H}{\partial P_1} (P_i, P_1) + \dots + \frac{\partial H}{\partial P_n} (P_i, P_n) \\
&\quad + \frac{\partial H}{\partial Q_1} (P_i, Q_1) + \dots + \frac{\partial H}{\partial Q_n} (P_i, Q_n),
\end{aligned}$$

also vermöge 4):

$$5) \quad \frac{dP_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial Q_i}, \quad \frac{dQ_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial P_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

wo die zweite Gleichung ganz ebenso abgeleitet wird.

Somit sehen wir:

Eine Berührungstransformation (und nur eine solche) lässt die kanonische Form der Gleichungen 1) unverändert.

Hieraus folgt die grosse Wichtigkeit der Berührungstransformationen für unsere Aufgabe. Jede Berührungstransformation verwandelt nämlich die Gestalt der Function H und es kann der Fall sein, dass in einer neuen Gestalt das Problem einfacher zu behandeln ist.

Wir wollen in diesem Paragraphen eine Berührungstransformation anwenden, die im Wesentlichen von JACOBI (Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps) herrührt.

Die allgemeinste derartige Transformation haben wir im vorigen Paragraphen abgeleitet. Bedeutet V eine beliebig gegebene Function der p_i und P_i :

$$6) \quad V = V(p_1, \dots, p_n, P_1, \dots, P_n),$$

so entspringt diese Transformation aus den Gleichungen:

$$7) \quad q_i = \frac{\partial V}{\partial p_i}, \quad Q_i = - \frac{\partial V}{\partial P_i},$$

wenn man aus ihnen die P und Q berechnet.

Ein specieller Fall ist hier der, dass die P in 6) nur linear und ganz enthalten sind, dann folgt aus 7) sofort:

$$V = - (P_1 \cdot Q_1 + P_2 \cdot Q_2 + \dots + P_n \cdot Q_n),$$

und $Q_1, \dots, Q_n$ sind also irgend welche gegebenen Functionen der p_i .

Ferner folgt dann aus 7), dass die q_i lineare Functionen der P_i sind, deren Coefficienten die p_i enthalten. Aus ihnen kann man sofort die P_i berechnen und werden sie also lineare Functionen der q_i .

Wir wollen nun im Speciellen annehmen, dass die Q lineare Functionen der p sind:

$$8) \quad Q_i = a_{1,i} \cdot p_1 + a_{2,i} \cdot p_2 + \dots + a_{n,i} \cdot p_n.$$

Dann folgt aus 7):

$$9) \quad q_i = -a_{i,1} \cdot P_1 - a_{i,2} \cdot P_2 - \dots - a_{i,n} \cdot P_n,$$

und man hat 9) dann nur nach den P aufzulösen.

Das Problem der drei Körper hat in § 10 die Gestalt angenommen:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial u_i}, \quad \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_i} \quad \text{u. s. w.}$$

und H ist hier:

$$10) \quad H = -\frac{m_1 m_2}{r_{12}} - \frac{m_2 m_3}{r_{23}} - \frac{m_3 m_1}{r_{31}} + \sum \frac{u_i^2 + v_i^2 + w_i^2}{m_i}.$$

Wir können also die Coordinaten x_i, y_i, z_i als die $p_1, \dots, p_9$, und die u_i, v_i, w_i als die $q_1, \dots, q_n$ wählen. Statt der $Q_1, \dots, Q_9$ wollen wir die Bezeichnungen $\xi_\alpha, \xi_\beta, \xi, \eta_\alpha, \eta_\beta, \eta, \zeta_\alpha, \zeta_\beta, \zeta$ einführen und zwar derart, dass die Gleichungen 8) übergehen in:

$$11) \quad \begin{cases} \xi_\alpha = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \\ \xi_\beta = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 \\ \xi = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 \end{cases}$$

und die aus diesen durch Vertauschung von x mit y und z und von ξ mit η und ζ hervorgehenden.

Die Constanten α und β sollen den Bedingungen genügen:

$$12) \quad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0. \end{cases}$$

Vermöge 12) haben die drei Ausdrücke:

$$13) \quad \alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2, \quad \alpha_2 \beta_3 - \beta_2 \alpha_3, \quad \alpha_3 \beta_1 - \beta_3 \alpha_1$$

einen gemeinsamen Werth und wollen wir annehmen, dass derselbe $= 1$ sei.

Die P_i wollen wir hier den ξ, η, ζ entsprechend mit λ, μ, ν bezeichnen.

Die Gleichungen 9) ergeben dann:

$$14) \quad \begin{cases} u_1 = -\alpha_1 \lambda_\alpha - \beta_1 \lambda_\beta - m_1 \lambda \\ u_2 = -\alpha_2 \lambda_\alpha - \beta_2 \lambda_\beta - m_2 \lambda \\ u_3 = -\alpha_3 \lambda_\alpha - \beta_3 \lambda_\beta - m_3 \lambda. \end{cases}$$

Setzt man noch:

$$15) \quad M = m_1 + m_2 + m_3,$$

so folgt durch Umkehrung, mit Benutzung von 12) und 13):

$$16) \quad Mx_1 = \xi + \xi_\alpha (\beta_2 m_3 - \beta_3 m_2) - \xi_\beta (\alpha_2 m_3 - \alpha_3 m_2).$$

Hieran schliessen sich 8 analoge Gleichungen.

Aus ihnen ergiebt sich:

$$17) \quad (x_1 - x_2) = -\xi_\alpha \beta_3 + \xi_\beta \alpha_3 \quad \text{u. s. w.}$$

Mithin wird:

$$18) \quad \begin{aligned} r_{12}^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \\ &= (\xi_\alpha^2 + \eta_\alpha^2 + \zeta_\alpha^2) \beta_3^2 - 2(\xi_\alpha \xi_\beta + \eta_\alpha \eta_\beta + \zeta_\alpha \zeta_\beta) \beta_3 \alpha_3 \\ &\quad + (\xi_\beta^2 + \eta_\beta^2 + \zeta_\beta^2) \alpha_3^2. \end{aligned}$$

Ebenso bildet man r_{23}^2 und r_{31}^2 . Die 6 Entfernungen sind darnach von ξ, η, ζ selbst ganz unabhängig.

Die lebendige Kraft ergiebt sich aus 14), wenn man noch voraussetzt, dass die 6 Constanten α, β der weiteren Gleichung genügen:

$$19) \quad 0 = \frac{\alpha_1 \beta_1}{m_1} + \frac{\alpha_2 \beta_2}{m_2} + \frac{\alpha_3 \beta_3}{m_3},$$

und die Abkürzungen einführt:

$$20) \quad \begin{cases} \frac{\alpha_1^2}{m_1} + \frac{\alpha_2^2}{m_2} + \frac{\alpha_3^2}{m_3} = \frac{1}{m_\alpha} \\ \frac{\beta_1^2}{m_1} + \frac{\beta_2^2}{m_2} + \frac{\beta_3^2}{m_3} = \frac{1}{m_\beta}. \end{cases}$$

$$21) \quad \sum \frac{u_i^2 + v_i^2 + w_i^2}{m_i} = \frac{\lambda_\alpha^2 + \mu_\alpha^2 + \nu_\alpha^2}{m_\alpha} + \frac{\lambda_\beta^2 + \mu_\beta^2 + \nu_\beta^2}{m_\beta} + M(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2).$$

Die Function H zerfällt demnach in zwei Theile:

$$22) \quad H' = -\frac{m_1 m_2}{r_{23}^2} - \frac{m_2 m_3}{r_{31}^2} - \frac{m_3 m_1}{r_{12}^2} + \frac{\lambda_\alpha^2 + \mu_\alpha^2 + \nu_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{\lambda_\beta^2 + \mu_\beta^2 + \nu_\beta^2}{2m_\beta},$$

$$H'' = \frac{M}{2} (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2).$$

Man erhält daher für $\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu, \nu$ das System 6^{ter} Ordnung:

$$23) \quad \frac{d\xi}{dt} = M \cdot \lambda, \quad \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad \text{u. s. w.},$$

welches sofort integrirt werden kann. Für die übrigen 12 Variablen kann man H auf den Theil H' beschränken und erhält dann ein System 12^{ter} Ordnung:

$$24) \quad \frac{d\xi_\alpha}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial \lambda_\alpha}, \quad \frac{d\lambda_\alpha}{dt} = - \frac{\partial H'}{\partial \xi_\alpha}, \quad \text{u. s. w.}$$

Das System 23) lässt sich sofort integriren und ergibt dann die Schwerpunktssätze. Das System 24) liefert die relativen Bewegungen der Punkte und ist ein vollständiges kanonisches System 12^{ter} Ordnung. Bemerkenswerth ist, dass zwischen den 6 Constanten α und β nur 4 Gleichungen stattfinden und demnach noch eine gewisse Willkür in ihrer Wahl vorhanden ist, von der man unter Umständen Gebrauch machen kann.

Von dem System 24) kennt man vier Integrale, nämlich das Princip der lebendigen Kraft und die Flächensätze. Man kann mit ihrer Hilfe das System 24) schliesslich, wenn man noch die Zeit t eliminirt, auf ein kanonisches System 6^{ter} Ordnung bringen, indessen ist es dazu nothwendig, die Symmetrie aufzugeben. Man hat dieses System 6^{ter} Ordnung dargestellt und zwar auf mehrere Weisen, indessen haben alle diese Darstellungen in Folge der Absicht, die kanonische Form nicht zu zerstören, etwas Gewaltames und die Function H , um welche sich ja Alles dreht, erlangt eine so complicirte Gestalt, dass man kaum noch ihren früheren einfachen Ausdruck erkennt.

Eine wesentliche Reduction wird hierdurch nicht erzielt, denn schon LAGRANGE war bis zur selben Ordnung vorgerückt. Ich will noch erwähnen, dass eine eingehendere Darstellung der sogenannten Gruppentheorie von LIE den völligen Beweis liefert, dass eine neue Reduction durch die bekannten Integrale überhaupt nicht mehr möglich ist.

§ 16.

Die Hamilton-Jacobi'sche partielle Differentialgleichung.

Wir haben in § 13 gesehen, dass man bei der Integration des Systems:

$$1) \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (i = 1, 2, \dots n)$$

die $2n$ Integrationsconstanten $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, \beta_1, \dots \beta_n$ stets so

wählen kann, dass sie, als Functionen der p_i und q_i , welche auch t enthalten, dargestellt:

$$2) \quad \begin{cases} \alpha_i = \alpha_i(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t) \\ \beta_i = \beta_i(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t) \end{cases}$$

ein Involutionssystem bilden. Aus den Untersuchungen des § 14 folgt dann, dass, wenn in 2) die α und p als unabhängige Variable angesehen und die β und q durch diese ausgedrückt werden, die entstehenden Gleichungen die Gestalt annehmen:

$$3) \quad q_i = \frac{\partial W}{\partial p_i}, \quad \beta_i = -\frac{\partial W}{\partial \alpha_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

wo W eine gewisse Function der p , α und t bedeutet.

$$4) \quad W = W(p_1, \dots, p_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t).$$

Diese Function W wollen wir jetzt genauer kennen lernen. Das erste System der Gleichungen 3) liefert n Integrationen des Systems 1) mit den n willkürlichen Constanten α . Setzt man die q_i aus 3) in

$$5) \quad H = H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t)$$

ein, so erhält H die Gestalt:

$$6) \quad H = H\left(p_1, \dots, p_n, \frac{\partial W}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial p_n}, t\right).$$

Setzt man weiter die q_i aus 3) in das erste der Systeme 1) rechts ein, so erhält man ein System von n Differentialgleichungen, in denen nur noch die p_i und t die Unbekannten sind. Macht man aber dieselbe Substitution in dem zweiten der Systeme 1), so erhält man ein ebensolches System von Differentialgleichungen zwischen den p_i und t , welches also dann in eine Folge des ersten Systems übergehen muss. Nun folgt aus 3) unter Berücksichtigung von 4) durch totale Differentiation nach t :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial^2 W}{\partial p_i \partial t} + \sum_{\lambda} \frac{\partial^2 W}{\partial p_i \partial p_{\lambda}} \cdot \frac{dp_{\lambda}}{dt},$$

oder nach 1):

$$-\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial^2 W}{\partial p_i \partial t} + \sum_{\lambda} \frac{\partial^2 W}{\partial p_i \partial p_{\lambda}} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_{\lambda}},$$

also:

$$0 = \frac{\partial^2 W}{\partial p_i \partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_{\lambda}} \cdot \left(\frac{\partial q_{\lambda}}{\partial p_i}\right),$$

wo in $\left(\frac{\partial q_{\lambda}}{\partial p_i}\right)$ für q_{λ} wieder die Ausdrücke 3) zu setzen sind.

Bei der Bildung von $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ ist der Ausdruck 5) zu Grunde zu legen. Differentiirt man aber 6) nach p_i , welches hier doppelt eingeht, insofern es auch implicite in W enthalten ist und bezeichnet man den partiellen Differentialquotienten von 6) nach p_i zum Unterschied von dem vorigen mit $\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)$, so folgt somit:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right) = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_\lambda} \cdot \frac{\partial q_\lambda}{\partial p_i},$$

und durch Einführung in die vorige Gleichung nimmt diese die einfache Gestalt an:

$$7) \quad 0 = \frac{\partial \left(\frac{\partial W}{\partial t} + H \right)}{\partial p_i}, \quad (i = 1, 2, \dots n),$$

wo H jetzt in der Gestalt 6) anzusetzen ist. Die Gleichung 7) beweist, dass der Ausdruck:

$$8) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + H = A$$

von den p_i ganz unabhängig ist. Man kann nun weiter gehen und nachweisen, dass er auch die α_i nicht enthält. Differentiirt man nämlich 8) nach α_i , so folgt:

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha_i} = \sum_\lambda \frac{\partial H}{\partial q_\lambda} \cdot \frac{\partial q_\lambda}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_i \partial t} = \sum \frac{dp_\lambda}{dt} \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \right)}{\partial p_\lambda} + \frac{\partial \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \right)}{\partial t}.$$

Die rechte Seite ist aber $= 0$, weil sie den totalen Differentialquotienten von $\frac{\partial W}{\partial \alpha_i}$, also einer Constanten nach der Zeit darstellt. Es ist daher:

$$9) \quad 0 = \frac{\partial \left(\frac{\partial W}{\partial t} + H \right)}{\partial \alpha_i}.$$

Die Gleichungen 7) und 9) beweisen, dass der Ausdruck 8) eine reine Function der Zeit t ohne jede willkürliche Constante wird. Man kann aber diese Function $f(t)$ noch von H subtrahiren, weil sie in den Differentialgleichungen 1) verschwindet. Es ergibt sich dann:

$$10) \quad 0 = \frac{\partial W}{\partial t} + H \left(p_1, \dots p_n, \frac{\partial W}{\partial p_1}, \dots \frac{\partial W}{\partial p_n}, t \right).$$

Diese Gleichung, mit den p und t als unabhängigen Variablen und W als zu bestimmender Function, ist die HAMILTON-JACOBI'sche partielle Differentialgleichung.

Sie hat, wie JACOBI gezeigt hat, die Eigenschaft, dass ein vollständiges Integral derselben unmittelbar die Integrale des Systems 1) liefert. Dies wollen wir jetzt zeigen.

Unter einem vollständigen Integral oder einer vollständigen Lösung von 10) versteht man nach LAGRANGE eine Lösung, welche eben so viele, von einander unabhängige willkürliche Constanten besitzt, als unabhängige Variablen vorhanden sind, deren Anzahl hier $= n + 1$ ist. Als eine derselben kann man auf der Stelle eine zu W hinzutretende Constante annehmen und wollen wir von dieser absehen. Die n übrigen seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, so dass W die Gestalt hat:

$$11) \quad W = W(p_1, \dots, p_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t).$$

Führt man noch die Bezeichnungen ein:

$$12) \quad q_i = \frac{\partial W}{\partial p_i},$$

so kann man die Integrale des Systems:

$$13) \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i},$$

in welches für q_i nach der Differentiation sein Ausdruck 12) zu setzen ist, unmittelbar angeben. (Es sind hier die p und t die Variablen und die α Parameter, welche in die rechte Seite von 13) eingehen). Differentiirt man 10) nach einem Parameter α_i , so folgt, weil er nur in W enthalten ist:

$$0 = \frac{\partial \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \right)}{\partial t} + \sum_{\lambda} \frac{\partial H}{\partial q_{\lambda}} \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \right)}{\partial p_{\lambda}},$$

also nach 13):

$$0 = \frac{\partial \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \right)}{\partial t} + \sum_{\lambda} \frac{dp_{\lambda}}{dt} \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \right)}{\partial p_{\lambda}},$$

oder:

$$0 = \frac{d \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \right)}{dt}.$$

Daraus folgt, dass die Ausdrücke:

$$14) \quad \beta_i = - \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}$$

die n Integrale des Systems 13) darstellen und somit durch Auflösung nach den p_i diese als Functionen der Zeit t , der willkürlichen Parameter α und der Integrationsconstanten β ergeben.

Differentiirt man ferner die Gleichung 10) total nach p_i , so folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \left(\frac{\partial W}{\partial p_i} \right)}{\partial t} + \sum_{\lambda} \left(\frac{\partial H}{\partial q_{\lambda}} \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial W}{\partial p_i} \right)}{\partial p_{\lambda}} \right) + \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ &= \frac{\partial \left(\frac{\partial W}{\partial p_i} \right)}{\partial t} + \sum_{\lambda} \left(\frac{dp_{\lambda}}{dt} \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial W}{\partial p_i} \right)}{\partial p_{\lambda}} \right) + \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ &= \frac{d \left(\frac{\partial W}{\partial p_i} \right)}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i}, \end{aligned}$$

also nach 12):

$$15) \quad \frac{dq_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

13) und 15) bilden wieder das vollständige System 1); und 12) und 14) sind die Integrale desselben mit den $2n$ willkürlichen Constanten α_i und β_i .

Der eigentliche Kern dieser Untersuchungen besteht in dem Aufdecken des tiefen Zusammenhanges zwischen der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und der Theorie der simultanen Differentialgleichungen, eines Zusammenhanges, wie er für lineare Gleichungen und ferner für zwei unabhängige Variablen (von LAGRANGE) schon lange erkannt worden war. Durch eine kleine Verallgemeinerung lässt sich leicht zeigen, dass in der That das eine Problem in das andere übergeführt werden kann. Doch müssen wir den Leser auf die einschlagenden Untersuchungen JACOBI's verweisen.

§ 17.

H enthält nicht die Zeit.

Wenn H , welches bis jetzt eine beliebige Function der p_i , q_i und t bezeichnete, die Zeit t nicht enthält, so erhält die partielle Differentialgleichung 10) des vorigen Paragraphen die Gestalt:

$$1) \quad 0 = \frac{\partial W}{\partial t} + H \left(p_1, \dots, p_n, \frac{\partial W}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial p_n} \right).$$

Da t in 1) nicht explicite enthalten ist, so kann man eine eigenthümliche Transformation vornehmen, deren Merkwürdigkeit darin besteht, dass die Transformationsformeln von der noch zu bestimmenden Function W abhängig sind, während sie in der Regel nur gegebene

Functionen enthalten. Man führe in 1) an Stelle von t eine neue Variable durch die Gleichung ein:

$$2) \quad \frac{\partial W}{\partial t} = -h,$$

drücke mittelst dieser Gleichung t aus, so dass sich ergibt:

$$3) \quad t = t(p_1, \dots, p_n, h),$$

und ersetze die Function W durch eine andere V mittelst der Gleichung:

$$4) \quad V = W - (t - \varepsilon) \cdot \frac{\partial W}{\partial t} = W + (t - \varepsilon) h,$$

wo ε eine beliebige Constante ist.

Macht man in 4) noch die Substitution 3), bedenkt, dass W in der Form vorausgesetzt ist:

$$5) \quad W = W(p_1, \dots, p_n, t),$$

und nimmt in den aufzustellenden Differentialquotienten von W nach p_i und t diese ursprüngliche Form, so folgt:

$$6) \quad \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\partial W}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial h} - \frac{\partial W}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial h} - (t - \varepsilon) \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)}{\partial h} = + (t - \varepsilon),$$

$$7) \quad \frac{\partial V}{\partial p_i} = \frac{\partial W}{\partial p_i} + \frac{\partial W}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial p_i} + h \frac{\partial t}{\partial p_i} = \frac{\partial W}{\partial p_i}.$$

Die Gleichung 1) nimmt demnach die Gestalt an:

$$8) \quad -h + H\left(p_1, \dots, p_n, \frac{\partial V}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial p_n}\right) = 0.$$

Hier sind $p_1, \dots, p_n$ und h die unabhängigen Variablen. Da aber der Differentialquotient von V nach h nicht vorkommt, so kann man sie so integrieren, als ob h constant wäre. In diesem Sinne hat also eine vollständige Lösung von 8) ausser einer zu V hinzutretenden additiven willkürlichen Constanten, die wir hier nicht beachten wollen, noch $n - 1$ willkürliche Constanten $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ in ihrem Ausdruck:

$$9) \quad V = V(p_1, \dots, p_n, h, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}),$$

und es ist gleichgiltig, ob man $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ als Constante oder als willkürliche Functionen von h ansieht. Wir wollen das Erstere annehmen.

Kehren wir jetzt zunächst zu der alten Function W zurück, so folgt:

$$10) \quad W = V - (t - \varepsilon) h = V - h \cdot \frac{\partial V}{\partial h}.$$

Macht man hierin die Substitutionen 9) und 2), so erhält W die Gestalt:

$$11) \quad W = W(p_1, \dots, p_n, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, t - \varepsilon),$$

so dass die früheren Constanten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ jetzt die Werthe annehmen:

$$12) \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \varepsilon.$$

Die Grössen 12) sind somit die eine Hälfte eines Systems kanonischer Integrationsconstanten. Die andere wird durch die Gleichungen 14), § 16, bestimmt, welche hier die Gestalt annehmen:

$$13) \quad \beta_i = -\frac{\partial W}{\partial \alpha_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

und

$$14) \quad \beta_n = -\frac{\partial W}{\partial \varepsilon} = +\frac{\partial W}{\partial t} = -h.$$

Aber auch in 13) kann man sofort wieder die Differentialquotienten von V in der Gestalt 9) einführen. Denn es ist nach 10):

$$15) \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial \alpha_i} - (t - \varepsilon) \cdot \frac{\partial h}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial V}{\partial \alpha_i}.$$

Man kann sich daher von den Substitutionen, die W in V überführen, ganz frei machen und erhält dann folgendes Endresultat:

Ist das System von totalen Differentialgleichungen:

$$16) \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (i = 1, \dots, n)$$

gegeben, in welchem H die Zeit t nicht enthält, so stelle man ein vollständiges Integral V der Differentialgleichung 8) auf, in welchem $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ die willkürlichen Constanten sind. Die Lösung des Systems 16) wird dann durch die Formeln gegeben:

$$q_i = \frac{\partial V}{\partial p_i}, \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$\beta_i = -\frac{\partial V}{\partial \alpha_i}, \quad (i = 1, \dots, n-1),$$

$$t - \varepsilon = -\frac{\partial V}{\partial h},$$

und es sind dann:

$$\alpha_1, \beta_1; \quad \alpha_2, \beta_2; \quad \dots \quad \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}; \quad \varepsilon, -h$$

die n Paare von kanonischen Integrationsconstanten.

Für das specielle System 8), § 10, lautet die partielle Differentialgleichung 8):

$$17) \quad h = - \sum \frac{m_\lambda \cdot m_\mu}{r_{\lambda, \mu}} + \frac{1}{2} \sum \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2}{m_i}$$

und die Gleichungen 13) stellen dann die Finalgleichungen zwischen den Coordinaten dar, während die Geschwindigkeiten sofort durch die Formeln bestimmt werden:

$$18) \quad m_i \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial z_i}.$$

Die partielle Differentialgleichung ist in der Gestalt 17) zum ersten Mal von HAMILTON abgeleitet worden, jedoch hat er die tieferen Consequenzen derselben nicht gezogen. Auch ist der Weg, den er eingeschlagen hatte, ein ganz anderer gewesen. Er hat die Function V als die sogenannte „Wirkung“ definirt und wollen wir sehen, wie sich seine Definition mit Leichtigkeit als eine Folge der Gleichung 17) selbst ergibt. Differentiirt man V , welches aus 17) als Function der Coordinaten zu bestimmen ist, total nach t , so folgt:

$$19) \quad \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \cdot \frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \cdot \frac{dz_i}{dt} \right) \\ &= \sum m_i \frac{dx_i^2 + dy_i^2 + dz_i^2}{dt^2} = 2T, \end{aligned}$$

mithin:

$$V = 2 \int_t^t T dt + C,$$

und wenn man annimmt, dass V für einen bestimmten Zeitpunkt t' verschwindet:

$$20) \quad V = 2 \int_{t'}^t T dt.$$

Die Wirkung V ist demnach gleich dem doppelten Integral der lebendigen Kraft nach der Zeit.

Dieses Integral lässt sich übrigens nach der Formel 21), § 6, sofort ausführen. In dieser ist $V' = \sum \frac{m_\lambda \cdot m_\mu}{r_{\lambda, \mu}}$, betrachtet man ferner nur die relativen Bewegungen um den Schwerpunkt, so ist $C' = h$ und also, da $T = V' + h$:

$$21) \quad V = 2 \int_{t'}^t (V' + h) dt = \frac{1}{\Sigma m} \cdot \frac{d \Sigma m_\lambda \cdot m_\mu \cdot r_{\lambda, \mu}^2}{dt} \bigg|_{t'}^t - 2h(t - t').$$

Schiesslich wollen wir noch die HAMILTON'sche Ableitung der partiellen Differentialgleichung 17), die er unter einer beschränkenden und wie JACOBI gezeigt hat, überflüssigen, ja den wahren Sachverhalt verdeckenden Voraussetzung aufgestellt hat, kennen lernen, weil dieselbe noch immer die bekanntere ist und auf einer Ausdehnung eines sehr bekannten Principes — des HAMILTON'schen Principes — beruht.

HAMILTON ging von den Gleichungen aus:

$$22) \quad m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

$$23) \quad U = \sum \frac{m_\lambda \cdot m_\mu}{r_{\lambda\mu}}.$$

Multiplicirt man die Gleichungen 22) der Reihe nach mit den virtuellen Variationen δx_i , δy_i , δz_i und setzt zur Abkürzung:

$$24) \quad \frac{dx_i}{dt} = u_i, \quad \frac{dy_i}{dt} = v_i, \quad \frac{dz_i}{dt} = w_i,$$

so folgt:

$$\begin{aligned} & \sum m_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2} \cdot \delta x_i + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \cdot \delta y_i + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \cdot \delta z_i \right) \\ &= \sum \frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial U}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial U}{\partial z_i} \delta z_i = \delta U. \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \delta x &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \cdot \delta x \right) - \frac{dx}{dt} \cdot \delta \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \delta x \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \delta \left(\frac{dx}{dt} \right)^2. \end{aligned}$$

Die vorige Gleichung verwandelt sich daher in:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \cdot \sum m_i \left(\frac{dx_i}{dt} \cdot \delta x_i + \frac{dy_i}{dt} \cdot \delta y_i + \frac{dz_i}{dt} \cdot \delta z_i \right) \\ = \delta U + \delta T = \delta(U + T), \end{aligned}$$

und hieraus folgt durch Integration nach t zwischen t' und t :

$$\begin{aligned} 25) \quad \sum m_i \left(\frac{dx_i}{dt} \cdot \delta x_i + \frac{dy_i}{dt} \cdot \delta y_i + \frac{dz_i}{dt} \cdot \delta z_i \right) \Big|_{t'}^t \\ = \int_{t'}^t \delta(U + T) dt = \delta \int_{t'}^t (U + T) dt. \end{aligned}$$

Diese Gleichung, in welcher $\delta x_i, \dots$ vor der Hand noch beliebige, unendlich kleine Veränderungen bedeuten, war der Ausgangspunkt für HAMILTON.

Die Coordinaten und Geschwindigkeiten sind Functionen der Zeit und $6n$ Constanten, für welche wir jetzt die der Zeit t' entsprechenden Anfangswerthe $x_i', y_i', z_i', u_i', v_i', w_i'$ nehmen wollen, so dass die Endgleichungen die Gestalt erhalten:

$$26) \quad x_i = x_i [x_1', y_1', z_1' \dots u_1', v_1', w_1' \dots (t - t')]$$

u. s. w. Durch Differentiation von 26) nach t erhält man dann sofort:

$$27) \quad u_i = u_i [x_1', y_1', z_1' \dots u_1', v_1', w_1' \dots (t - t')].$$

Die Wirkung:

$$V = 2 \int_{t'}^t T dt$$

wird dann ebenfalls von der Form:

$$28) \quad V = V [x_1', \dots u_1' \dots (t - t')].$$

Mit 28) nehmen wir folgende Transformationen vor. Zunächst berechne man aus 26) die u', v', w' und setze sie in 28) ein. Es folgt:

$$29) \quad V = V [x_1, y_1, z_1 \dots x_1', y_1', z_1' (t - t')].$$

Die Gleichung der lebendigen Kraft wird hier:

$$30) \quad h = - \sum \frac{m_\lambda \cdot m_\mu}{r_{\lambda\mu}} + \sum \frac{m_i}{2} \cdot (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2).$$

Denkt man sich für u_i, v_i, w_i ihre Ausdrücke 27) und dann für u', v', w' ihre eben angegebenen Werthe eingesetzt, so wird h eine Function der alten und neuen Coordinaten und von $(t - t')$. Berechnet man hieraus $(t - t')$ und setzt es in 29) ein, so folgt endlich:

$$31) \quad V = V (x_1, y_1, z_1 \dots x_1', y_1', z_1' \dots h).$$

Diese Form legte HAMILTON seinen Untersuchungen zu Grunde. Wir wollen nun annehmen, dass in 25) die $\delta x, \delta y, \delta z$ nicht ganz willkürliche Grössen sind, sondern folgendermaassen bestimmt werden.

Betrachten wir die Bewegung eines Systems von der Zeit t' bis zur Zeit t . Sie ist erst durch die Angabe der Anfangscoordinaten und Anfangsgeschwindigkeiten individuell bestimmt. Nehmen wir an, dass diese unendlich wenig verändert werden, so werden wir eine andere Bewegung erhalten, welche aber ebenfalls bestimmt ist. Die Configurationen und Geschwindigkeiten werden für einen und denselben Zeitpunkt nur unendlich wenig differiren und diese Differenzen sollen jetzt für $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i, \delta u_i, \delta v_i, \delta w_i$ genommen werden. Sind also $\delta x_i', \delta y_i', \delta z_i', \delta u_i', \delta v_i', \delta w_i'$ die Anfangsunterschiede, so ergeben sich die δx_i u. s. w. sofort aus 26) und 27) in der Gestalt:

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_1'} \cdot \delta x_1' + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial u_1'} \cdot \delta u_1' + \dots \text{ u. s. w.}$$

Das Integral, welches auf der rechten Seite von 25) steht, wird wegen 30) sofort:

$$= \int_{t'}^t (2T - h) dt = \int_{t'}^t 2T dt - h(t - t') = V - h(t - t').$$

Unter den gemachten Beschränkungen wird nun:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t'}^t (U + T) dt &= \delta V - \delta[h(t - t')] \\ &= \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i} \delta z_i \right) \\ &\quad + \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x_i'} \delta x_i' + \frac{\partial V}{\partial y_i'} \delta y_i' + \frac{\partial V}{\partial z_i'} \delta z_i' \right) \\ &\quad + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \delta h - (t - t') \delta h. \end{aligned}$$

Es lässt sich nun beweisen, dass:

$$32) \quad \frac{\partial V}{\partial h} = (t - t').$$

Das Element h ist nämlich in 31) durch Substitution des Ausdruckes

$$33) \quad (t - t') = (t - t') (x_1 \dots x_1' \dots h)$$

in 29) hineingebracht worden. Daher ist:

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\partial V}{\partial (t - t')} \cdot \frac{\partial (t - t')}{\partial h},$$

wo V rechts in der Form 29) angenommen ist. Nun ist:

$$V = 2 \int_{t'}^t T dt = \int_{t'}^t (T + U) dt + h(t - t'),$$

folglich:

$$\frac{\partial V}{\partial (t - t')} = T + U + h + (t - t') \cdot \frac{\partial h}{\partial (t - t')} = P,$$

wo:

$$P = \sum \left(\frac{\partial \int_{t'}^t (T + U) dt}{\partial x_i} u_i + \frac{\partial \int \dots}{\partial y_i} v_i + \frac{\partial \int \dots}{\partial z_i} w_i \right).$$

Ferner folgt aus der Gleichung 25), wenn man die obere Grenze t variirt, wodurch die Endvariationen $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ in $u_i \delta t, v_i \delta t, w_i \delta t$ übergeführt werden:

$$2T = P,$$

daher:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial(t-t')} &= T + U + h + (t-t') \cdot \frac{\partial h}{\partial(t-t')} - 2T \\ &= (t-t') \cdot \frac{\partial h}{\partial(t-t')}, \end{aligned}$$

und somit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial h} &= \frac{\partial V}{\partial(t-t')} \cdot \frac{\partial(t-t')}{\partial h} \\ &= (t-t') \cdot \frac{\partial h}{\partial(t-t')} \cdot \frac{\partial(t-t')}{\partial h} = (t-t'). \end{aligned}$$

Die beiden letzten Glieder der, der Gleichung 32) vorangehenden Gleichung heben sich also gegenseitig auf und durch Einsetzen in 25) erhält man:

$$\begin{aligned} 34) \quad & \Sigma m_i(u_i \delta x_i + v_i \delta y_i + w_i \delta z_i) - \Sigma m_i(u_i' \delta x_i' + v_i' \delta y_i' + w_i' \delta z_i') \\ &= \Sigma \frac{\partial V}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i} \delta z_i + \Sigma \frac{\partial V}{\partial x_i'} \delta x_i' + \frac{\partial V}{\partial y_i'} \delta y_i' + \frac{\partial V}{\partial z_i'} \delta z_i'. \end{aligned}$$

Nun waren die Variationen der Anfangscoordinaten und Anfangsgeschwindigkeiten beliebig. Daher kann man auch die ihnen an Anzahl gleichen Variationen der Anfangs- und Endcoordinaten beliebig annehmen. Die Gleichung 34) muss somit für jeden Werth von $\delta x_i \dots \delta x_i' \dots$ bestehen und zerfällt demnach in:

$$35) \quad \begin{cases} m_i u_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} \dots, \\ m_i u_i' = -\frac{\partial V}{\partial x_i'} \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

Ist also V , d. h. die Wirkung, wie es in 31) vorausgesetzt ist, als Function der Coordinaten der Anfangs- und Endlage und der Grösse h gegeben, so ergibt das zweite System der Gleichungen 35) durch reine Differentiation sofort $3n$ Endintegrale und das erste System die Geschwindigkeitscomponenten, während 32) die gebrauchte Zeit bestimmt.

In dieser Beschränkung kann man die Wirkung V im Allgemeinen nicht zur Lösung des Problems benutzen wollen, weil man zur Bildung der speciellen Form 31) die Lösung bereits haben muss.

Das zweite System der Gleichungen 35) kann selbstverständlich nur $(3n-1)$ Gleichungen zwischen den laufenden Coordinaten x_i, y_i, z_i äquivalent sein und man erhält auch sofort die zwischen ihnen be-

stehende Relation, wenn man bemerkt, dass die Gleichung 30), die vermöge der ersten Gleichungen 35) in die partielle Differentialgleichung:

$$36) \quad h = - \sum \frac{m_\lambda \cdot m_\mu}{r_{\lambda\mu}} + \frac{1}{2} \sum \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2}{m_i}$$

übergeht, auch für die Anfangswerthe gelten muss:

$$37) \quad h = - \sum \frac{m_\lambda \cdot m_\mu}{r_{\lambda,\mu'}} + \frac{1}{2} \sum \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial x_i'}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i'}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i'}\right)^2}{m_i}.$$

Diese letzte Gleichung kann als eine zweite partielle Differentialgleichung für die Function V angesehen werden.

§ 18.

Die Hamilton-Jacobi'sche partielle Differentialgleichung für die Bewegung der Planeten um die Sonne.

Die Function H hat hier den Werth:

$$1) \quad H = - \frac{\mu}{r} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2},$$

die Differentialgleichungen der Bewegung werden:

$$2) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial u}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial w},$$

$$3) \quad \frac{du}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dw}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial z},$$

und die JACOBI'sche partielle Differentialgleichung lautet:

$$4) \quad h = - \frac{\mu}{r} + \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}{2}.$$

Es handelt sich jetzt darum, von 4) eine Lösung herzustellen, die ausser h und einer zu V hinzutretenden Constanten noch zwei willkürliche Constante enthält. JACOBI zeigt in seinen Vorlesungen über analytische Mechanik, wie man durch Einführung elliptischer Coordinaten leicht zu einer solchen gelangen könnte. Indessen wollen wir hier V in der von HAMILTON vorausgesetzten Form, also ausgedrückt durch h, x, y, z und die Anfangswerthe der Coordinaten x', y', z' annehmen:

$$5) \quad V = V(x, y, z, x', y', z', h).$$

Nun ist klar, dass die Wirkung V nur abhängen kann:

- 1) von der grossen Achse des Kegelschnittes, also auch von $h = -\frac{\mu}{2a}$,
- 2) der Entfernung des Anfangsortes von der Sonne $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$,
- 3) der Entfernung des Endortes von der Sonne $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,
- 4) der Entfernung des Endortes vom Anfangsorte $\varrho = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$.

Denn durch diese vier Grössen ist, wie leicht zu beweisen, die Gestalt der durchlaufenen Ellipse (resp. Hyperbel und Parabel) und auch die Geschwindigkeit in jedem Punkte der Bahn, mithin auch:

$$V = 2 \int_{t'}^t T dt = \int_{t'}^t (u^2 + v^2 + w^2) dt$$

bestimmt. V hat also die einfachere Form:

$$6) \quad V = V(r, r', \varrho, h).$$

Demnach wird:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{x}{r} + \frac{\partial V}{\partial \varrho} \cdot \frac{(x-x')}{\varrho} \quad \text{u. s. w.}$$

Benutzt man noch die Gleichung:

$$\begin{aligned} x(x-x') + y(y-y') + z(z-z') &= r^2 - (xx' + yy' + zz') \\ &= r^2 + \frac{\varrho^2 - r^2 - r'^2}{2} = \frac{\varrho^2 - (r+r')^2 + 2r(r+r')}{2}, \end{aligned}$$

so wird:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 &= \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)^2 \\ &\quad + 2 \cdot \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varrho} \left(\frac{(r+r')}{\varrho} - \frac{1}{r} \cdot \frac{(r+r')^2 - \varrho^2}{2\varrho} \right). \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung 4) erhält demnach die Gestalt:

$$\begin{aligned} 7) \quad h &= \frac{1}{r} \left[-\mu + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varrho} \cdot \frac{\varrho^2 - (r+r')^2}{\varrho} \right] \\ &\quad + \left[\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)^2}{2} + \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varrho} \cdot \frac{r+r'}{\varrho} \right]. \end{aligned}$$

Die entsprechende Differentialgleichung für die Anfangscoordinaten wird demnach:

$$8) \quad h = \frac{1}{r'} \left[-\mu + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial r'} \cdot \frac{\partial V}{\partial \rho} \cdot \frac{\rho^2 - (r + r')^2}{\rho} \right] + \left[\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial r'} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \right)^2}{2} + \frac{\partial V}{\partial r'} \cdot \frac{\partial V}{\partial \rho} \cdot \frac{r + r'}{\rho} \right].$$

In diesen Differentialgleichungen sind r , r' und ρ die unabhängigen Variablen und V die zu bestimmende Function. Es ist zweckmässig, erst die Gleichung 7) für sich allein zu integrieren und die Lösung dann so zu specialisiren, dass auch der Bedingung 8) genügt wird. Da in 7) nur nach r und ρ differentiirt wird, so kann man dann r' als constanten Parameter ansehen und 7) nach der LAGRANGE'schen für diesen Fall angegebenen Methode leicht integrieren. Indessen lässt sich auch auf anderem Wege, nämlich durch Einführung neuer Variablen sehr leicht eine Lösung von 7) ableiten. Setzt man:

$$9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{r + r' + \rho}{2} = p \\ \frac{r + r' - \rho}{2} = q \end{array} \right\} \quad \text{also:} \quad \left\{ \begin{array}{l} r = p + q - r', \\ \rho = p - q, \end{array} \right.$$

so wird:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial p} + \frac{\partial V}{\partial q} \right), \quad \frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial p} - \frac{\partial V}{\partial q} \right),$$

und also:

$$\begin{aligned} & -\mu + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \rho} \cdot \frac{\rho^2 - (r + r')^2}{\rho} \\ &= -\mu - \left[\left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)^2 - \left(\frac{\partial V}{\partial q} \right)^2 \right] \frac{p \cdot q}{2(p - q)} \\ &= -\frac{p \cdot q}{2(p - q)} \cdot \left\{ \left[\left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)^2 - \frac{2\mu}{p} \right] - \left[\left(\frac{\partial V}{\partial q} \right)^2 - \frac{2\mu}{q} \right] \right\}, \end{aligned}$$

ebenso:

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \right)^2}{2} + \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \rho} \cdot \frac{r + r'}{\rho} - h \\ &= \frac{1}{2(p - q)} \left\{ p \left[\left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)^2 - 2h \right] - q \left[\left(\frac{\partial V}{\partial q} \right)^2 - 2h \right] \right\}. \end{aligned}$$

Setzt man daher noch der Kürze wegen:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)^2 - \frac{2\mu}{p} - 2h = P,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)^2 - \frac{2\mu}{q} - 2h = Q,$$

so geht die Gleichung 7) über in:

$$10) \frac{1}{(p+q)-r'} \cdot \frac{p+q}{2(p-q)} \cdot (P-Q) + \frac{1}{2(p-q)} \cdot (pP-qQ) = 0.$$

Man erhält daher sofort eine spezielle Lösung, wenn man $P = Q = 0$ setzt, also:

$$11) \quad \frac{\partial V}{\partial p} = \pm \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{p} + h},$$

$$12) \quad \frac{\partial V}{\partial q} = \pm \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{q} + h}.$$

Diese beiden Gleichungen können offenbar zusammen bestehen.

Nimmt man die erste Wurzel positiv, die zweite negativ, so kann man für V setzen:

$$13) \quad V = \sqrt{2} \cdot \int_q^p \sqrt{\frac{\mu}{x} + h} \cdot dx = \sqrt{2} \cdot \int_{\frac{r+r'-q}{2}}^{\frac{r+r'+q}{2}} \sqrt{\frac{\mu}{x} + h} \cdot dx.$$

Da dieser Ausdruck für V in Bezug auf r und r' symmetrisch ist, so genügt er auch der partiellen Differentialgleichung 8), und da er ausserdem verschwindet, wenn man $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ setzt, so ist 13) in der That die Wirkung des Systems vom Anfangs- zum Endort und zwar in der gewünschten Form.

Die Zeit, welche der Planet gebraucht, um den Weg zwischen beiden Orten zurückzulegen, findet man nach 32), § 17:

$$14) \quad (t-t') = \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int_{\frac{r+r'-q}{2}}^{\frac{r+r'+q}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{x} + h}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \cdot \int_{\frac{r+r'-q}{2}}^{\frac{r+r'+q}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{2a}}}.$$

Es ist nun ausserordentlich merkwürdig, dass die zu integrierende Function genau dieselbe ist, wie in Gleichung 3a des § 3, welche sich auf die geradlinige Bewegung bezog. Auf diese Weise sind wir zu dem

LAMBERT'schen Satz gelangt, welcher aussagt, dass die Zeit, welche ein Planet gebraucht, um von einem Orte zu einem anderen zu gelangen, nur abhängt:

- 1) von der grossen Achse $= a$,
- 2) von der Summe der beiden Entfernungen von der Sonne $= r + r'$,
- 3) von der beide Orte verbindenden Sehne $= \varrho$,

und zwar ist diese Zeit gleich derjenigen, welche ein in gerader Linie sich auf die Sonne zu bewegendes Planet, für welchen a denselben Werth hat, gebraucht, um von der Entfernung $\frac{r + r' + \varrho}{2}$ zu der Entfernung $\frac{r + r' - \varrho}{2}$ zu gelangen.

Besonders einfach wird der Ausdruck für die Zeit, wenn $h = 0$, also die Bahn eine Parabel ist. Gleichung 5), § 3, giebt dann:

$$15) \quad t - t' = \frac{2}{3\sqrt{2\mu}} \left[\left(\frac{r + r' + \varrho}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{r + r' - \varrho}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right].$$

In dieser speciellen Fassung war der Satz bereits EULER (Miscell. Ber. A. T., S. 20) bekannt, während er in seiner allgemeinsten Form erst von LAMBERT entdeckt wurde.

Die HAMILTON-JACOBI'schen Untersuchungen, welche die eigentliche Quelle dieses so lange als Curiosum angesehenen Satzes aufdecken, ergeben ebenso merkwürdige Gleichungen für die Bahn und die Geschwindigkeitscomponenten. Setzt man der Kürze wegen:

$$16) \quad \sqrt{\frac{\mu}{r + r' + \varrho} - \frac{\mu}{4a}} = A, \quad \sqrt{\frac{\mu}{r + r' - \varrho} - \frac{\mu}{4a}} = B,$$

so ergeben die Gleichungen 35), § 17:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\frac{r + r' + \varrho}{2}}{\partial x} \int \sqrt{\frac{2\mu}{x} - \frac{\mu}{a}} dx \\ &= A \frac{\partial(r + r' + \varrho)}{\partial x} - B \frac{\partial(r + r' - \varrho)}{\partial x}, \end{aligned} \quad *)$$

*) Hier darf offenbar die Coordinate x nicht mit dem x unter den Integralzeichen verwechselt werden.

also:

$$17) \quad \begin{cases} u = A\left(\frac{x}{r} + \frac{x-x'}{\rho}\right) - B\left(\frac{x}{r} - \frac{x-x'}{\rho}\right) \\ v = A\left(\frac{y}{r} + \frac{y-y'}{\rho}\right) - B\left(\frac{y}{r} - \frac{y-y'}{\rho}\right) \\ w = A\left(\frac{z}{r} + \frac{z-z'}{\rho}\right) - B\left(\frac{z}{r} - \frac{z-z'}{\rho}\right) \end{cases}$$

und ebenso:

$$18) \quad \begin{cases} u' = A\left(\frac{x'}{r'} + \frac{x'-x}{\rho}\right) - B\left(\frac{x'}{r'} - \frac{x'-x}{\rho}\right) \\ v' = A\left(\frac{y'}{r'} + \frac{y'-y}{\rho}\right) - B\left(\frac{y'}{r'} - \frac{y'-y}{\rho}\right) \\ w' = A\left(\frac{z'}{r'} + \frac{z'-z}{\rho}\right) - B\left(\frac{z'}{r'} - \frac{z'-z}{\rho}\right). \end{cases}$$

Sind nun die Anfangscoordinaten und Anfangsgeschwindigkeitscomponenten x', y', z', u', v', w' , also auch h gegeben, so stellen die Gleichungen 18) drei Endgleichungen zwischen den Coordinaten x, y, z in einer äusserst merkwürdigen Form dar. Zunächst sind sie nur zwei unabhängigen Gleichungen äquivalent, da die Gleichung:

$$\frac{u'^2 + v'^2 + w'^2}{2} = h + \frac{\mu}{r'}$$

identisch erfüllt wird, wenn man für u', v', w' ihre Werthe aus 18) einsetzt. Eliminirt man ferner aus 18) A und B , so erhält man leicht:

$$19) \quad 0 = x(y'w' - z'v') + y(z'u' - x'w') + z(x'v' - y'u'),$$

also die Gleichung einer durch die Sonne gehenden Ebene. Etwas umständlicher ist es, aus der Form 18) zu erkennen, dass die Bahn ein Kegelschnitt ist. Man kann dazu auf folgende Weise gelangen. Berechnet man aus den ersten beiden Gleichungen 18) A und B , und setzt die erhaltenen Werthe in den Ausdruck $(A^2 - B^2)$ ein, so kommt:

$$A^2 - B^2 = r' \cdot \rho \frac{[v'(x' - x) - u'(y' - y)](-v'x' + u'y')}{(xy' - y'x)^2}$$

und man kann ebenso zwei analoge Ausdrücke für $A^2 - B^2$ bilden. Setzt man daher der Kürze wegen die Zähler der drei auftretenden Brüche $= \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, und ihre Summe $= \lambda$, so wird auch:

$$A^2 - B^2 = \frac{r' \cdot \rho \cdot \lambda}{(xy' - y'x)^2 + (yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2}.$$

Der Nenner kann mit Leichtigkeit umgeformt werden in:

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (xx' + yy' + zz')^2 \\ &= \frac{[(r + r')^2 - \rho^2][\rho^2 - (r - r')^2]}{4}, \end{aligned}$$

andererseits folgt aus 16):

$$A^2 - B^2 = - \frac{2\mu \cdot \rho}{(r + r')^2 - \rho^2}.$$

Setzt man diesen Werth in die obige Gleichung ein, und multiplicirt mit $\frac{(r + r')^2 - \rho^2}{2\rho}$, so ergibt sich:

$$- \mu = \frac{2r' \cdot \lambda}{\rho^2 - (r - r')^2},$$

oder:

$$\rho^2 - r^2 - r'^2 + 2r \cdot r' + \frac{2r'}{\mu} \cdot \lambda = 0.$$

Nun ist endlich:

$$\rho^2 - r^2 - r'^2 = - 2(xx' + yy' + zz'),$$

und da λ ebenfalls in Bezug auf x, y, z linear ist, so erhalten wir eine Endgleichung von der Form:

$$r = ax + by + cz + d,$$

welche nichts anderes ist, als die Gleichung 25), § 1.

Es ist auch nicht schwer, die anderen Gleichungen desselben Paragraphen zu verificiren, wenn auch a priori Niemand umgekehrt aus den in § 1 aufgestellten Formeln die merkwürdigen Gleichungen 17) und 18) abgeleitet haben würde. Man sieht an diesem Beispiel, wie man durch eine allgemeine Theorie einem speciellen und längst durchforschten Problem eine neue und ohne Kenntniss der Theorie höchst überraschende Seite abgewinnen kann.

Man kann, wie JACOBI gezeigt hat, die partielle Differentialgleichung 4) noch auf andere Weisen integriren, und so die Lösung des Problems in einer sehr grossen Mannigfaltigkeit von Formen darstellen, die man schwerlich auf anderem Wege entdeckt haben würde.

Schliesslich wollen wir noch eine einfache geometrische Bedeutung der Wirkung für den Fall einer KEPLER'schen Ellipse aufsuchen, wie sie in einer kurzen Notiz (T-note on the action in an elliptic orbit) in dem Quaterly Journ. of Math. 1866 angegeben ist.

Bezeichnet man die Geschwindigkeit des Planeten in P (siehe Figur Seite 14) mit v , so ist:

$$dV = v^2 \cdot dt = \frac{ds}{dt} \cdot ds.$$

Die Zunahme dS des vom Radiusvector nach der Sonne beschriebenen Sectors ist:

$$dS = \frac{1}{2} dt \cdot \sqrt{\mu \cdot a(1 - e^2)},$$

andererseits ist, wenn man mit f das von F auf die Tangente gefällte Loth bezeichnet:

$$2dS = f \cdot ds,$$

und daher:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{\mu \cdot a(1 - e^2)}}{f}.$$

Ist ebenso f' das vom anderen Brennpunkt auf die Tangente gefällte Loth, so ist nach einem bekannten Satz der Ellipse:

$$ff' = b^2 = a^2(1 - e^2).$$

Es wird demnach:

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\sqrt{\mu \cdot a(1 - e^2)}}{f} \cdot ds = \frac{n}{\sqrt{1 - e^2}} \cdot f' ds \\ &= \frac{2n}{\sqrt{1 - e^2}} \cdot dS', \end{aligned}$$

wenn man mit S' den vom Radiusvector nach dem anderen Brennpunkt beschriebenen Flächenraum bezeichnet. Nimmt man nun an, dass die Wirkung und dieser Flächenraum vom Perihel gezählt werden, so wird:

$$20) \quad V = \frac{2n}{\sqrt{1 - e^2}} \cdot S'.$$

Während also der vom Radiusvector nach der Sonne beschriebene Sector der Zeit proportional ist, ist der von dem Radiusvector nach dem anderen Brennpunkt beschriebene Sector proportional der Wirkung.

§ 19.

Geschichtlicher Ueberblick zum zweiten Abschnitt.

Nachdem die allgemeinen Integrale des n Körperproblems abgeleitet worden und die Differentialgleichungen der Bewegung in ihre jetzt übliche Gestalt gebracht worden waren, trat eine längere Pause ein, in der man keinen nennenswerthen Schritt vorwärts kam, wenigstens, soweit es sich um die Einsicht in die Beschaffenheit des Pro-

blems handelte. Erst im Jahre 1809 wurde durch POISSON (*Mémoire sur la variation des constants arbitraires dans les questions de Mécanique*, Journal de l'école polytechnique, Tome VIII, pag. 266 etc.) ein neuer Satz aufgestellt, welcher, wie wir gesehen, den Keim zu grossen analytischen Untersuchungen enthielt. Er fand ihn bei seiner Bemühung, den Formeln für die sogen. Präcession und Nutation der Erdsachse, sowie denjenigen für die sogen. gestörten Bewegungen, eine grosse Eleganz zu geben, was ihm ja auch gelungen ist. Da er ihn nur als Mittel zu Transformationen anwendete und keine Gelegenheit fand, ihn mit einer weiteren Theorie in Zusammenhang zu bringen, so mag wohl hierin die Ursache liegen, dass er den wahren analytischen Charakter seiner Formel nicht genügend hervorgehoben hat, zumal sie bei den bereits bekannten Integralen nichts Neues lieferte.

Ungefähr um dieselbe Zeit veröffentlichte LAGRANGE (*Mémoire sur la théorie des variations des éléments des planètes*, Oeuvres VI, pag. 713 etc.) seine Formel und verallgemeinerte sie sehr bald. Auch er verwendete sie dazu, dem sogenannten Störungsproblem eine sehr elegante Form zu geben und scheint er sie nur als Mittel für diese ihm gerade interessirende Transformation geschätzt zu haben, wobei ihm wahrscheinlich der innige Zusammenhang seiner Formel mit der POISSON'schen entgangen ist.

Im Jahre 1844 bereicherte HAMILTON in einer in den Philosophical transactions of the royal society of London erschienenen Arbeit: „On a general method in Dynamics, by which the study of the motion of all free systems of attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central relation or characteristic function“ die analytische Mechanik mit einem neuen Princip, dem der variirenden Wirkung. Er stellt den Begriff der Wirkung auf als Integral der lebendigen Kraft nach der Zeit von einer Configuration zu einer anderen, setzt voraus, dass sie als Function der Coordinaten dieser beiden Configurationen und der einen aus dem Satz der lebendigen Kraft folgenden Constanten dargestellt wird und entwickelt die beiden partiellen Differentialgleichungen, welchen sie genügt. Er beweist ferner, dass ihre Kenntniss hinreicht, um durch blosse Differentiation sofort die Endintegrale zu erhalten und leitet dieselben für $n = 2$ ab. Doch erkannte er wohl nicht die fundamentale Bedeutung der Differentialgleichungen und namentlich, dass eine allein genügt, um durch eine vollständige Lösung auch die vollständige Lösung des ganzen Problems zu bewirken. Erst JACOBI stellte die partielle Differentialgleichung an die Spitze und die ursprüngliche Definition

der Wirkung als des Integrals der lebendigen Kraft in den Hintergrund und führte so das Problem auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung zurück. Auch verallgemeinerte er die Untersuchungen HAMILTON's, indem er die Function H , welche für das n Körperproblem = der Differenz der lebendigen Kraft und des Potentials war, von jeder Beschränkung befreite und namentlich durch die Annahme, dass H auch die Zeit t enthalte, den Formeln eine ausserordentliche Symmetrie gab. Allerdings war dann die partielle Differentialgleichung in einer etwas anderen Form enthalten und konnte dieselbe nicht auf die ursprüngliche HAMILTON'sche zurückgeführt werden.

JACOBI begnügte sich aber hiermit nicht. Indem er die partielle Differentialgleichung mit dem POISSON'schen Satze verband, gelang es ihm, durch tiefgehende analytische Untersuchungen nachzuweisen, dass das System von Constanten, welche durch diese Methode herbeigeführt werden, ein kanonisches sei, und namentlich machte er darauf aufmerksam, dass das System der Anfangselemente ein specielles solches ist. Doch dehnte JACOBI, dessen Hauptbestreben es stets gewesen ist, zwischen den verschiedensten analytischen Untersuchungen den Zusammenhang herzustellen, seine Untersuchungen weiter aus und schuf eine gross angelegte Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Darstellung aber nicht in den Rahmen dieses Buches gehört.

Mit Leichtigkeit konnten die allgemeinen Principien auf die elliptische Bewegung angewendet werden, wobei freilich zu bemerken ist, dass schon LAGRANGE für diesen Fall ein System von Constanten gefunden hat, welches ohne Weiteres in ein kanonisches hätte verwandelt werden können. Die hier gegebene Umwandlungsweise eines Systems gegebener Constanten in ein kanonisches rührt von BOUR her.

Mit der Darstellung, Vervollkommnung und Verallgemeinerung der JACOBI'schen Ideen haben sich eine ganze Reihe von Mathematikern beschäftigt, zumal Involutionssysteme auch bei anderen berühmten Problemen, zum Beispiel dem PFAFF'schen Problem, welches sich mit der Reduction eines Differentialausdruckes $\sum f_i dx_i$, wo die f_i gegebene Functionen der x sind, auf die einfachste Form beschäftigt, und bei gewissen raumtheoretischen Untersuchungen ihre Anwendung finden. Von den hier zu nennenden Arbeiten von A. MAYER und S. LIE ist in diesem Werke nur so viel benutzt worden, als es dem Verfasser zweckmässig erschien, welcher hofft, dass die durchgehende Anwendung von Determinantenrelationen der hier gegebenen Darstellung angemessen ist.

In neuester Zeit ist in den Berichten der sächsischen Akademie und in den Acta mathematica Bd. 11 eine sehr wichtige Arbeit von Professor Dr. BRUNS erschienen, in welcher er den strengen Beweis führt, dass die algebraischen Integrale durch die bekannten erschöpft sind. Die neuere Functionentheorie mit ihren scharfen Definitionen, ihrem zielbewussten und auf allgemeine Principien gerichteten Arbeiten kann allein, wenn sie immer weiter vertieft wird, Aussicht auf eine so klare Analyse des hier vorliegenden Problems bieten, wie man sie seit KEPLER und NEWTON für den speciellen Fall zweier Körper besitzt.

Dritter Abschnitt.

Die Theorie der Störungen.

§ 20.

Unser Sonnensystem betrachtet als System von n Punkten.

Der Himmelskörper giebt es vielleicht unendlich viele und würde man bei der Bewegung eines derselben oder mehrerer verhältnissmässig naher auf alle übrigen Rücksicht nehmen müssen, so würde das Problem von einer unübersteiglichen Ausdehnung werden. Weil aber nach dem Gesetz der Schwere die Anziehung zweier Körper im quadratischen Verhältniss ihrer Entfernung abnimmt, so kann man oft mit grosser Annäherung den Einfluss sehr entfernter Körper vernachlässigen.

Um einen Ueberschlag über die Grösse dieser Annäherung zu gewinnen, wollen wir annehmen, es seien n Körper gegeben, für welche die Bezeichnungen des § 6 beibehalten werden sollen. Es seien also x_1, y_1, z_1, m_1 Coordinaten und Masse des ersten Körpers u. s. w., ferner ξ, η, ζ die Coordinaten ihres Schwerpunktes. Ausser diesen n Körpern möge aber noch einer vorhanden sein, mit den Coordinaten X, Y, Z und der Masse M , derart, dass seine Entfernung L vom Schwerpunkt der n ersten die grösste Ausdehnung l des aus diesen gebildeten Systems bedeutend überwiegt.

Die Coordinaten in Bezug auf diesen Schwerpunkt sollen wieder durch gestrichelte Buchstaben bezeichnet werden. Dann ist also:

$$L = \sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}.$$

Die Bewegungsgleichungen für den äusseren Punkt werden hier:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = - \sum \frac{m_\lambda (X' - x'_\lambda)}{\sqrt{(X' - x'_\lambda)^2 + (Y' - y'_\lambda)^2 + (Z' - z'_\lambda)^2}^3}$$

u. s. w. Der Radicand ist:

$$= L^2 - 2(X'x' + Y'y' + Z'z') + (x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

und sind das zweite und dritte Glied in Bezug auf das erste beziehungsweise von der Ordnung $\frac{l}{L}$ resp. $\left(\frac{l}{L}\right)^2$. Durch Anwendung des binomischen Satzes ergibt sich also, wenn man beachtet, dass:

$$\Sigma m x' = \Sigma m y' = \Sigma m z' = 0,$$

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = - \Sigma m \cdot \frac{X'}{L^3} + \delta,$$

wo δ in Bezug auf das erste Glied nur von der Ordnung $\left(\frac{l}{L}\right)^2$ ist.

Nun ist:

$$\Sigma m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + M \cdot \frac{d^2 X}{dt^2} = 0, \text{ d. h.}$$

$$\Sigma m \cdot \frac{d^2 \xi}{dt^2} = - M \cdot \frac{d^2 X}{dt^2},$$

die obige Gleichung verwandelt sich also in:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} \cdot \Sigma m = M \cdot \Sigma m \cdot \frac{(X - \xi)}{(\sqrt{(X - \xi)^2 + (Y - \eta)^2 + (Z - \zeta)^2})^3} - M\delta.$$

Unter Vernachlässigung von Gliedern, welche in Bezug auf das Hauptglied von der Ordnung $\left(\frac{l}{L}\right)^2$ sind, gelangen wir somit zu dem Resultat:

Die Bewegung des Schwerpunktes eines Systems von n Punkten geht unter der Einwirkung eines sehr weit entfernten äusseren Punktes so vor sich, als ob in ihm (dem Schwerpunkt) die Massen der n Punkte vereinigt wären.

Untersuchen wir nun weiter die relativen Bewegungen der n Punkte in Bezug auf ihren Schwerpunkt. Es ist:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1'}{dt^2} &= m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} - m_1 \frac{d^2 \xi}{dt^2} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x_1'} + M m_1 \left(\frac{(X' - x_1')}{(\sqrt{(X' - x_1')^2 + (Y' - y_1')^2 + (Z' - z_1')^2})^3} - \frac{X'}{L^3} \right) \\ &\quad + \frac{M m_1 \delta}{\Sigma m}. \end{aligned}$$

In dem ersten Glied bedeutet V wieder das Potential der n Punkte. Das zweite Glied ist in Bezug auf das erste von der Ordnung:

$$\frac{M}{\Sigma m} \left(\frac{l}{L} \right)^3,$$

während das dritte von noch höherer Ordnung ist. Wenn also M nicht gegen Σm sehr gross ist, so erhält man mit grosser Annäherung:

Ein sehr weit entfernter Punkt hat auf die relativen Bewegungen eines Systems von n Punkten um ihren Schwerpunkt gar keinen Einfluss.

Wenn an Stelle des äusseren Punktes ebenfalls ein System tritt oder auch mehrere Systeme, deren Dimensionen aber alle verhältnissmässig klein zu den Entfernungen der Systeme von einander sind, so übersieht man leicht, dass die Schwerpunkte derselben sich mit ihren Gesamtmassen anziehen, während die relativen Bewegungen der constituirenden Körper eines Systems um seinen Schwerpunkt durch die anderen gar nicht alterirt werden.

Ein solches System ist z. B. unser Sonnensystem, d. h. unsere Sonne mit ihren Planeten, deren Satelliten, den Kometen und den anderen kleinen Himmelskörpern, welche um die Sonne kreisen. Wenn man von den Kometen, unter denen einige sich sehr weit von der Sonne entfernen können, absieht, so ist die grösste Ausdehnung desselben etwa 1,000,000,000 Meilen. Der nächste Fixstern ist aber mindestens 4000mal so weit entfernt und der Einfluss, den er auf die relativen Bewegungen innerhalb unseres Sonnensystems hat, ist daher von der Ordnung:

$$\frac{M}{\Sigma m} \cdot \frac{1}{64,000,000,000}$$

und er wird wohl schwerlich jemals zu Tage treten. Dagegen ist es möglich, dass im Laufe der Jahrtausende durch die Fixsterne die Richtung und Geschwindigkeit der sonst gleichmässigen Bewegung des Schwerpunktes unseres Sonnensystems geändert wird, eine Bewegung, welche jetzt (in Bezug auf die als ruhend angesehene Milchstrasse) gegen das Sternbild des Herkules gerichtet ist.

Wenn wir nun auch von den Fixsternen bei den relativen Bewegungen in unserem Sonnensystem absehen können, so haben wir doch noch zu berücksichtigen, dass es aus Körpern und nicht aus Punkten gebildet ist. Die Dimensionen der einzelnen Körper des Sonnensystems sind jedoch sehr klein gegen die Entfernungen derselben von einander und wenn es sich daher nur um die Bewegungen ihrer Schwerpunkte (Mittelpunkte) handelt, so kann man sie als Massenpunkte ansehen.

Diese Annäherung wird noch wesentlich gesteigert durch den Umstand, dass die Himmelskörper beinahe Kugelgestalt haben und

aus homogenen concentrischen Schalen gebildet werden, da eine solche Kugel nämlich einen äusseren Punkt vollkommen streng so anzieht, als ob ihre Masse im Schwerpunkt vereinigt wäre. In der That lässt sich der Einfluss der Abweichung eines Planeten von der Kugelgestalt nur bei der Bewegung eines Satelliten um ihn und der Einfluss der Abweichung der Sonne vielleicht noch bei der Merkurbahn nachweisen.

Man sieht also, dass mit grosser Annäherung die Sonne, die Planeten und die Satelliten als Massenpunkte angesehen werden können, welche keiner anderen Einwirkung als ihrer gegenseitigen Anziehung unterworfen sind. Indessen giebt es in diesem Systeme noch Partialsysteme, nämlich je einen Planeten und dessen Satelliten, auf welche man in erster Linie jene Annäherung anwenden kann. Betrachten wir z. B. die Sonne, die Erde und den Mond. Da die Erde von der Sonne ungefähr vierhundertmal so weit entfernt ist, als vom Mond, so ist der Einfluss der Sonne auf die relativen Bewegungen von Mond und Erde, im Verhältniss zu den zwischen Mond und Erde wirkenden Kräften, wenn M die Masse der Sonne und m die Summe der Erd- und Mondmasse bezeichnet, von der Ordnung:

$$\frac{M}{m} \cdot \left(\frac{1}{400}\right)^3$$

oder angenähert:

$$\frac{2,000,000}{7 \cdot 64,000,000} = \frac{1}{224},$$

also trotz der über 300,000mal so grossen Masse der Sonne verhältnissmässig klein. Doch ist er zu gross, als dass er sich nicht bemerkbar machen sollte und in der That werden die zahlreichen sogenannten Ungleichheiten der Mondbahn fast alle durch die Sonne bewirkt.

Bedeutend geringer ist die Einwirkung der Sonne auf das Internum der übrigen aus je einem Planeten und dessen Satelliten gebildeten Partialsysteme, theils wegen deren geringerer Ausdehnung, theils wegen ihrer bedeutenderen Masse und theils wegen ihrer grösseren Entfernung von der Sonne.

Die bewegende Kraft, welche die Sonne auf den gemeinsamen Schwerpunkt von Erde und Mond ausübt, ist nach Früherem, wenn R die Entfernung desselben von der Sonne bezeichnet:

$$= \frac{Mm}{R^2} + \delta.$$

δ ist in Bezug auf dieses erste Glied von der Ordnung:

$$\frac{1}{400^2} = \frac{1}{160000}.$$

δ ist aber in Wirklichkeit noch kleiner, wie aus dem Umstande folgt, dass die Erde den Mond um etwa das Achtzigfache übertrifft. Um die hieraus entspringende Verminderung des Fehlers δ zu bestimmen, wollen wir wieder n Punkte mit den früheren Bezeichnungen annehmen.

Es ist:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = M \cdot \Sigma m \cdot \frac{X'}{L^3} + \delta',$$

und δ' ist, wie man durch weitere Berechnung findet:

$$\delta' = \frac{M}{L^5} \sum \left(3m(X'x' + Y'y' + Z'z')x' - \frac{3}{2}mX'(x'^2 + y'^2 + z'^2) + \frac{15}{2}m \cdot \frac{(X'x' + Y'y' + Z'z')^2 \cdot X'}{L^2} \right) + \varepsilon,$$

wo ε von höherer Ordnung ist, als die entwickelten Glieder. Es habe jetzt der eine Punkt, z. B. m_1 , mit den Coordinaten x_1' , y_1' , z_1' eine Masse, welche die Summe Σm der übrigen Massen bedeutend überwiegt. Dann wird der Theil von δ' , welcher von m_1 herrührt, sehr klein gegen die übrigen sein. Denn wenn auch m_1 grösser ist, als die Summe Σm der übrigen Massen, so werden auch gerade deswegen x_1' , y_1' , z_1' in Bezug auf die übrigen Coordinaten von der Ordnung $\frac{\Sigma m}{m_1}$, die Quadrate und Producte also von der Ordnung $\left(\frac{\Sigma m}{m_1}\right)^2$ sein. Lässt man also in δ diesen Theil fort, so wird δ von der Ordnung:

$$\frac{M \cdot \Sigma m}{L^2} \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^2.$$

Dasselbe ist in Bezug auf das Hauptglied, nämlich $\frac{M(m_1 + \Sigma m)}{L^2}$ von der Ordnung:

$$\left(\frac{l}{L}\right)^2 \cdot \frac{\Sigma m}{m_1 + \Sigma m} \text{ oder von der Ordnung } \left(\frac{l}{L}\right)^2 \cdot \frac{\Sigma m}{m_1}.$$

Da die Erde etwa 80mal so viel Masse enthält wie der Mond, so steigert sich bei der Vernachlässigung von δ die Annäherung von $\left(\frac{1}{400}\right)^2$ auf $\left(\frac{1}{400}\right)^2 \cdot \frac{1}{80} = \frac{1}{12,800,000}$.

In der Folge wird daher unter Planet kurzweg der Schwerpunkt des aus dem Hauptkörper und dessen Satelliten gebildeten Systems und unter seiner Masse die Summe der einzelnen Massen verstanden werden.

Was ferner die Asteroiden und Kometen, sowie die übrigen um die Sonne kreisenden Körper betrifft, so ist nach der übereinstimmenden Meinung der Astronomen ihre Masse so klein, dass sie gegen die der Sonne und der grossen Planeten verschwindet. Sie können deshalb die Bewegungen der letzteren nicht beeinflussen, während umgekehrt ihre Bewegung durch diese bestimmt wird.

Aus der Theorie unseres Sonnensystems scheidet man demnach ein Problem von 9 Massenpunkten, nämlich: Sonne, Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun aus, indem diese Himmelskörper als mathematische Punkte betrachtet werden.

§ 21.

Die Bahnen der Planeten um die Sonne. Die Theorie der absoluten Störungen.

Die in den früheren Paragraphen angeführten allgemeinen Integrale und Principien sind trotz ihrer hohen Bedeutung nicht hinreichend, das Problem der n Körper in seiner allgemeinsten Fassung zu bewältigen. Vielmehr würde man unter der Annahme, dass die Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten für einen bestimmten Zeitpunkt gegeben sind, in der Weise verfahren, dass man nach steigenden Potenzen von t entwickelt, wie EULER es vorgeschlagen. Sei x irgend eine Coordinate und x_0 ihr Werth für $t = t_0$, so würde diese Entwicklung lauten:

$$1) \quad x = x_0 + (t - t_0) \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=t_0} + \frac{(t - t_0)^2}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)_{t=t_0} + \dots$$

Die Coefficienten werden gefunden, indem man durch Differentiation der Differentialgleichungen die höheren Differentialquotienten durch die niederen ausdrückt und die letzteren (bis auf diejenigen erster Ordnung) eliminirt.

Dass die Reihe 1) convergirt, so lange $t - t_0$ einen bestimmten Grenzwert nicht überschreitet, folgt aus den Untersuchungen von CAUCHY über die Convergenz derjenigen Reihen, welche die durch Differentialgleichungen definirten Functionen darstellen und findet

man eine sehr schöne Auseinandersetzung derselben in dem Werke von BRIOT und BOUQUET (deutsch von FISCHER) „Theorie der doppelt periodischen Functionen“ in dem Kapitel: Allgemeine Methode für die Untersuchung der durch Differentialgleichungen definirten Functionen.

Man kann die Reihen 1) so lange benutzen, als sie convergiren und muss dann von einem innerhalb der Convergenz liegenden Zeitpunkt an diese Entwicklung von Neuem beginnen. Ein grosses Zeitintervall muss man demnach in geeignete Abschnitte theilen und kann dann, von Stufe zu Stufe fortschreitend, die Coordinaten für jeden Zeitpunkt berechnen.

Es ist indessen klar, dass diese Methode sehr an Unvollkommenheiten leidet. Denn erstens ist die Entwicklung der höheren Differentialquotienten sehr mühselig (bis $n = 4$ hat sie der Astronom GASPARIIS fortgesetzt). Dann ist es nicht ausgeschlossen, dass die Fehler, welche man bei jeder Reihenentwicklung durch Abbrechen bei einem bestimmten Gliede macht, sich schliesslich so summiren, dass für einigermassen grosse Zeitintervalle das Endresultat ganz gefälscht ist. Endlich aber verhüllt diese stufenweise Entwicklung einfachere Gesetze, welche vielleicht den Bewegungen zu Grunde liegen und darum würde diese Methode die letzte Zuflucht sein, wenn keine andere zum Ziele führte.

Glücklicher Weise sind aber für unser Sonnensystem zwei solcher Methoden besonders von EULER und CLAIRAUT entwickelt und von LAGRANGE und LAPLACE in ein so klares Licht gesetzt worden, dass den späteren Mathematikern in ihrer Begründung nichts mehr zu leisten übrig bleibt. Der über alle Erwartung grosse Erfolg, welchen die Anwendung dieser Methoden auf die Kenntniss unseres Sonnensystems gehabt hat, beruht auf einigen wesentlichen Umständen, die zuerst zu der Entwicklung jener Methoden Veranlassung gegeben haben. Der hervorragendste besteht in der dominirenden Stellung, welche die Sonne in Folge ihrer die der Planeten um über das 700fache überwiegenden Masse einnimmt. Die Astronomen haben es daher vorgezogen — nur LAGRANGE macht zum Theil eine Ausnahme — die Bewegungen nicht auf den Schwerpunkt des ganzen Systems, sondern auf die Sonne selbst zu beziehen und wenn wir ihnen folgen, so müssen wir uns auf die in § 6 Nr. 28 gegebenen Formeln beziehen.

Die hier zu betrachtenden Differentialgleichungen sind daher:

$$2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 x_\lambda}{dt^2} = - \frac{\mu_\lambda \cdot x_\lambda}{r_\lambda^3} + \frac{\partial R_\lambda}{\partial x_\lambda} \\ \frac{d^2 y_\lambda}{dt^2} = - \frac{\mu_\lambda \cdot y_\lambda}{r_\lambda^3} + \frac{\partial R_\lambda}{\partial y_\lambda} \\ \frac{d^2 z_\lambda}{dt^2} = - \frac{\mu_\lambda \cdot z_\lambda}{r_\lambda^3} + \frac{\partial R_\lambda}{\partial z_\lambda} \end{array} \right\} (\lambda = 1, 2, \dots, n),$$

wobei:

$$\begin{aligned} 3) \quad R_\lambda &= \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{\sqrt{(x_\lambda - x_\alpha)^2 + (y_\lambda - y_\alpha)^2 + (z_\lambda - z_\alpha)^2}} \\ &\quad - \sum_\alpha m_\alpha \cdot \frac{x_\lambda x_\alpha + y_\lambda y_\alpha + z_\lambda z_\alpha}{(\sqrt{(x_\alpha)^2 + (y_\alpha)^2 + (z_\alpha)^2})^3} \\ &= \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{r_{\lambda\alpha}} - \sum_\alpha m_\alpha \cdot \frac{x_\lambda x_\alpha + y_\lambda y_\alpha + z_\lambda z_\alpha}{r_\alpha^3}. \end{aligned}$$

(Der Index α hat hier alle Werthe von 1 bis n , nur nicht λ zu durchlaufen.)

$$4) \quad \mu_\lambda = M + m_\lambda.$$

In den Differentialgleichungen 2) überwiegen die ersten Glieder rechts die von den R herrührenden wegen der Grösse der Sonnenmasse ganz bedeutend, und die erste Annäherung soll die sein, dass $R_1, R_2, \dots, R_n$ vernachlässigt werden. Dann gehen die Gleichungen 2) über in die in § 1 u. s. w. behandelten und da die μ auch nur wenig von einander verschieden sind, so gelten dann die drei KEPLER'schen Gesetze.

In der That stellen diese Gesetze die Bewegungen der Planeten um die Sonne so genau dar, dass sie umgekehrt aus den Beobachtungen von KEPLER berechnet worden sind. Indessen macht sich schliesslich der Einfluss der durch $R_1 \dots R_n$ dargestellten Grössen im Laufe der Zeit doch geltend und zwar insofern, als sie die Strenge der KEPLER'schen Gesetze stören. Darum hat man diese Grössen Störungsfunctionen genannt und die Abweichungen der Planetenbahnen von den KEPLER'schen Ellipsen kurzweg Störungen. Die folgenden Untersuchungen sollen der Theorie derselben gewidmet sein.

Denkt man sich in den R statt $m_1, m_2, \dots$ resp. geschrieben $\alpha m_1, \alpha m_2, \dots, \alpha m_n$, wo α eine beliebige Zahl ist (CAUCHY's Régulateur), so werden die R auch mit dem Factor α multiplicirt und die Gleichungen 2) gehen über in:

$$5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = - \frac{\mu_1 \cdot x_1}{r_1^3} + \alpha \cdot \frac{\partial R_1}{\partial x_1} \\ \frac{d^2 y_1}{dt^2} = - \frac{\mu_1 \cdot y_1}{r_1^3} + \alpha \cdot \frac{\partial R_1}{\partial y_1} \\ \frac{d^2 z_1}{dt^2} = - \frac{\mu_1 \cdot z_1}{r_1^3} + \alpha \cdot \frac{\partial R_1}{\partial z_1} \end{array} \right\} \text{ u. s. w.}$$

Wird in 5) α als analytische Grösse festgehalten, so werden die Coordinaten, welche den Differentialgleichungen 5) genügen, ausser α noch $6n$ Integrationsconstante enthalten. Für $\alpha = 0$ erhalten sie die in § 1 u. s. w. bestimmte Gestalt.

Das wesentliche Princip, auf welchem die erste von den Mathematikern entwickelte Methode, die Methode der absoluten Störungen beruht, besteht in der Annahme, dass die aus 5) berechneten Coordinaten, welche Functionen von α und von $6n$ Integrationsconstanten sind, nach steigenden Potenzen von α entwickelt werden können.

Irgend eine Coordinate x soll also in der Form dargestellt sein:

$$6) \quad x = x^0 + \alpha \delta x^0 + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \cdot \delta^2 x^0 + \dots$$

Setzt man dann $\alpha = 0$, so erlangt man natürlich wieder die Coordinaten der KEPLER'schen Ellipse. Es handelt sich daher noch um die Feststellung der übrigen Terme $\delta x^0, \delta^2 x^0 \dots$ der Reihe 6). Setzt man schliesslich $\alpha = 1$, so erhält man die wirklichen Coordinaten als Functionen der Zeit in der Form:

$$7) \quad x = x^0 + \frac{\delta x^0}{1} + \frac{\delta^2 x^0}{1 \cdot 2} + \frac{\delta^3 x^0}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Die Bestimmung der $\delta x^0, \delta^2 x^0 \dots$, welche man absolute Störungen des ersten, zweiten u. s. w. Grades nennt, kann, wie wir jetzt zeigen werden, durch ein Inductionsverfahren vorgenommen werden, indem man nämlich die Störungen ersten Grades auf die ursprünglichen Ausdrücke x^0 u. s. w., die Störungen zweiten Grades auf die des ersten Grades und die ursprünglichen Ausdrücke und allgemein die Störungen irgend eines Grades auf diejenigen der sämtlichen niederen Grade und die ursprünglichen Coordinaten zurückführt.

Denkt man sich in 5) für die Coordinaten ihre Werthe 6) eingesetzt, so müssen die Gleichungen 5) dann völlig identisch werden. Setzt man also:

$$8) \quad \begin{cases} x_1 = x_1^0 + \alpha \delta x_1^0 + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \cdot \delta^2 x_1^0 + \dots \\ y_1 = y_1^0 + \alpha \delta y_1^0 + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \cdot \delta^2 y_1^0 + \dots \\ z_1 = z_1^0 + \alpha \delta z_1^0 + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \cdot \delta^2 z_1^0 + \dots \end{cases}$$

so erhält man zunächst wieder für $\alpha = 0$:

$$9) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x_1^0}{dt^2} = - \frac{\mu_1 x_1^0}{(r_1^0)^3} \\ \frac{d^2 y_1^0}{dt^2} = - \frac{\mu_1 y_1^0}{(r_1^0)^3} \\ \frac{d^2 z_1^0}{dt^2} = - \frac{\mu_1 z_1^0}{(r_1^0)^3} \end{cases}$$

wie es sein muss.

x_1^0, y_1^0, z_1^0 sind nach § 1 bestimmt.

Nimmt man nun α so klein an, dass die Entwicklungen der beiden Seiten von 5) nach steigenden Potenzen von α convergiren, so müssen die Coefficienten gleich hoher Potenzen links und rechts einander gleich sein. In der ersten Gleichung 5) ist der Coefficient von $\frac{\alpha^p}{1 \cdot 2 \dots p}$ links offenbar:

$$10) \quad = \frac{d^2 \delta^p x_1}{dt^2}.$$

Das Glied $-\frac{\mu_1 x_1}{r_1^3} = -\frac{\mu_1 x_1}{(\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2})^3}$ ergibt als Coefficienten von $\frac{\alpha^p}{1 \cdot 2 \dots p}$ einen Ausdruck, dessen Form ziemlich verwickelt ist, dessen Bildung mit Hilfe des polynomischen Lehrsatzes aber Nichts im Wege steht. Indessen übersieht man sofort, dass derjenige Theil des Coefficienten, welcher von den Störungen p^{ter} Ordnung herrührt, sofort gegeben ist durch:

$$11) \quad -\mu_1 \frac{\delta^p x_1}{(r_1^0)^3} + \frac{3\mu_1 x_1^0}{(r_1^0)^5} (x_1^0 \delta^p x_1 + y_1^0 \delta^p y_1 + z_1^0 \delta^p z_1).$$

Was das Glied $\alpha \cdot \frac{\partial R_1}{\partial x_1}$ anbetrifft, so darf man (wegen des Factors α), um zu dem Coefficienten von $\frac{\alpha^p}{1 \cdot 2 \dots p}$ zu gelangen, in den Reihen 8) offenbar nur bis zu den Störungen $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades gehen.

Bezeichnet man die Summe dieses Coefficienten und desjenigen Theils des vorhergehenden, welcher ebenfalls nur von den Störungen bis zum $(p-1)^{\text{ten}}$ Grade abhängt, mit X_1^p , Y_1^p , Z_1^p , so folgt, wenn statt x_1^0 , y_1^0 , z_1^0 (da eine Verwechslung ausgeschlossen ist) einfach x_1 , y_1 , z_1 geschrieben wird:

$$12) \begin{cases} \frac{d^2 \delta^p x_1}{dt^2} = -\mu_1 \frac{\delta^p x_1}{r_1^3} + 3\mu \cdot \frac{x_1}{r_1^5} (x_1 \delta^p x_1 + y_1 \delta^p y_1 + z_1 \delta^p z_1) + X_1^p \\ \frac{d^2 \delta^p y_1}{dt^2} = -\mu_1 \frac{\delta^p y_1}{r_1^3} + 3\mu \cdot \frac{y_1}{r_1^5} (x_1 \delta^p x_1 + y_1 \delta^p y_1 + z_1 \delta^p z_1) + Y_1^p \\ \frac{d^2 \delta^p z_1}{dt^2} = -\mu_1 \frac{\delta^p z_1}{r_1^3} + 3\mu \cdot \frac{z_1}{r_1^5} (x_1 \delta^p x_1 + y_1 \delta^p y_1 + z_1 \delta^p z_1) + Z_1^p. \end{cases}$$

Kennt man nun die ursprünglichen Coordinaten und die Störungen bis incl. zum $(p-1)^{\text{ten}}$ Grad, so sind X_1^p , Y_1^p , Z_1^p bekannte Functionen der Zeit und es handelt sich also um die Integration der Differentialgleichungen 12), in welchen jetzt $\delta^p x_1$, $\delta^p y_1$, $\delta^p z_1$ die Unbekannten sind.

Man bemerkt, dass die successiven zu integrierenden Differentialgleichungen stets dieselbe allgemeine Form haben und wenn es gelingt, die allgemeine Form der Lösung unter der alleinigen Annahme, dass X_1^p , Y_1^p , Z_1^p gegebene Functionen der Zeit sind, festzustellen, so erhält man durch ein gleichförmig sich wiederholendes Verfahren die sämmtlichen Störungen und damit die Coordinaten als Functionen der Zeit, — natürlich unter der Voraussetzung, dass die entstandenen Reihen convergiren.

Da α dadurch in die Differentialgleichungen 5) eingetreten ist, dass man die Massen m_1 , m_2 . . . mit α multiplicirt hat, so werden die $\delta^p x$. . . homogene Functionen der Massen vom p^{ten} Grade werden (wenigstens kann man sie so darstellen) und der Grad der Störungen ist daher derjenige Grad, in welchem die störenden Massen in ihre Ausdrücke eingehen.

§ 22.

Lösung der für die absoluten Störungen aufgestellten Differentialgleichungen.

Es handelt sich jetzt um die Integration der linearen Differentialgleichungen von der allgemeinen Form:

$$1) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \delta x}{dt^2} = -\mu \cdot \frac{\delta x}{r^3} + \frac{3\mu \cdot x}{r^5} (x\delta x + y\delta y + z\delta z) + X \\ \frac{d^2 \delta y}{dt^2} = -\mu \cdot \frac{\delta y}{r^3} + \frac{3\mu \cdot y}{r^5} (x\delta x + y\delta y + z\delta z) + Y \\ \frac{d^2 \delta z}{dt^2} = -\mu \cdot \frac{\delta z}{r^3} + \frac{3\mu \cdot z}{r^5} (x\delta x + y\delta y + z\delta z) + Z. \end{cases}$$

Hierbei sind x, y, z solche als gegeben betrachtete Functionen von t , welche den Differentialgleichungen:

$$2) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\mu \cdot x}{r^3} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{\mu \cdot y}{r^3} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{\mu \cdot z}{r^3} \end{cases}$$

genügen. In ihnen sind also noch die in § 2, 15), eingeführten sechs Constanten $a, e, \Omega, i, \pi, \varepsilon$ enthalten. X, Y, Z sind ebenfalls als bekannte Functionen von t vorausgesetzt. Der Theorie der linearen Differentialgleichungen gemäss muss man die Gleichungen 1) zu integrieren suchen, wenn man an Stelle von X, Y, Z die Null setzt. Unter dieser Annahme kennt man aber sofort sechs partikuläre Integrale des Systems, nämlich die sechs Differentialquotienten der Coordinaten nach den Constanten $a, e, \Omega, i, \pi, \varepsilon$. In der That müssen die Gleichungen 2) in Identitäten übergehen, wenn man für die Coordinaten ihre Functionen von t und diesen sechs Constanten einsetzt. Differentiirt man also 2) in diesem Sinne nach a , so ergibt sich:

$$3) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \cdot \frac{\partial x}{\partial a}}{dt^2} = -\frac{\mu \cdot \frac{\partial x}{\partial a}}{r^3} + 3\mu \cdot \frac{x}{r^5} \left(x \frac{\partial x}{\partial a} + y \frac{\partial y}{\partial a} + z \frac{\partial z}{\partial a} \right) \\ \frac{d^2 \cdot \frac{\partial y}{\partial a}}{dt^2} = -\frac{\mu \cdot \frac{\partial y}{\partial a}}{r^3} + 3\mu \cdot \frac{y}{r^5} \left(x \frac{\partial x}{\partial a} + y \frac{\partial y}{\partial a} + z \frac{\partial z}{\partial a} \right) \\ \frac{d^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial a}}{dt^2} = -\frac{\mu \cdot \frac{\partial z}{\partial a}}{r^3} + 3\mu \cdot \frac{z}{r^5} \left(x \frac{\partial x}{\partial a} + y \frac{\partial y}{\partial a} + z \frac{\partial z}{\partial a} \right) \end{cases}$$

und entsprechende Gleichungen gelten für die Differentialquotienten nach den übrigen Elementen. Unter der Annahme also, dass $X=Y=Z=0$ ist, erhält die vollständige Lösung von 1) die Gestalt:

$$4) \quad \begin{cases} \delta x = A \frac{\partial x}{\partial a} + B \frac{\partial x}{\partial e} + C \frac{\partial x}{\partial \Omega} + D \frac{\partial x}{\partial i} + E \frac{\partial x}{\partial \pi} + F \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \\ \delta y = A \frac{\partial y}{\partial a} + B \frac{\partial y}{\partial e} + \dots \\ \delta z = A \frac{\partial z}{\partial a} + B \frac{\partial z}{\partial e} + \dots \end{cases}$$

wo A, B, C, D, E, F sechs willkürliche Constanten sind.

Der LAGRANGE'schen Theorie der Variation der Constanten gemäss behält man für die Lösung des Systems 1) die Form 4) auch dann bei, wenn X, Y, Z irgend welche gegebene Functionen von t sind, nur mit dem Unterschiede, dass jetzt $A, B, \dots$ nicht constant, sondern noch näher zu bestimmende Functionen von t sein sollen. Durch Einsetzen von 4) in 1) erhält man aber nur drei Bestimmungsgleichungen zwischen den sechs Variablen $A, B, \dots$ und man kann daher noch drei andere Gleichungen zwischen ihnen willkürlich wählen. Der Theorie gemäss sind diese:

$$5) \quad \begin{cases} 0 = \frac{dA}{dt} \cdot \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{dB}{dt} \cdot \frac{\partial x}{\partial e} + \dots \\ 0 = \frac{dA}{dt} \cdot \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{dB}{dt} \cdot \frac{\partial y}{\partial e} + \dots \\ 0 = \frac{dA}{dt} \cdot \frac{\partial z}{\partial a} + \frac{dB}{dt} \cdot \frac{\partial z}{\partial e} + \dots \end{cases}$$

und mit ihrer Hilfe erhalten die aus 4) durch Differentiation entstehenden Gleichungen die Form:

$$6) \quad \begin{cases} \frac{d \delta x}{dt} = A \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial a} + B \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial e} + \dots \\ \frac{d \delta y}{dt} = A \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial y}{\partial a} + B \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial y}{\partial e} + \dots \\ \frac{d \delta z}{dt} = A \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial z}{\partial a} + B \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial z}{\partial e} + \dots \end{cases}$$

als ob $A, B, \dots$ constant wären.

Differentiirt man 6) noch einmal, so folgt:

$$7) \quad \frac{d^2 \delta x}{dt^2} = A \cdot \frac{d^2 \frac{\partial x}{\partial a}}{dt^2} + B \cdot \frac{d^2 \frac{\partial x}{\partial e}}{dt^2} + \dots$$

$$+ \frac{dA}{dt} \cdot \frac{d \frac{\partial x}{\partial a}}{dt} + \frac{dB}{dt} \cdot \frac{d \frac{\partial x}{\partial e}}{dt} + \dots$$

u. s. w. und durch Einsetzen von 7) und 4) nehmen die Gleichungen 1) unter Berücksichtigung von 3) die Gestalt an:

$$8) \quad \begin{cases} X = \frac{dA}{dt} \cdot \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{dB}{dt} \cdot \frac{\partial u}{\partial e} + \dots \\ Y = \frac{dA}{dt} \cdot \frac{\partial v}{\partial a} + \frac{dB}{dt} \cdot \frac{\partial v}{\partial e} + \dots \\ Z = \frac{dA}{dt} \cdot \frac{\partial w}{\partial a} + \frac{dB}{dt} \cdot \frac{\partial w}{\partial e} + \dots \end{cases}$$

wo u, v, w wie früher die Geschwindigkeitscomponenten sind.

Die Gleichungen 5) und 8) sind die sechs Gleichungen, welche die Variablen $A, B, \dots$ bestimmen. Löst man sie nach $\frac{dA}{dt}, \frac{dB}{dt}, \dots$ auf, so folgt unter Benutzung der Gleichungen 60), § 10, diese Entwicklung sofort in der übersichtlichen Gestalt:

$$9) \quad \begin{cases} \frac{dA}{dt} = X \frac{\partial a}{\partial u} + Y \frac{\partial a}{\partial v} + Z \frac{\partial a}{\partial w} \\ \frac{dB}{dt} = X \frac{\partial e}{\partial u} + Y \frac{\partial e}{\partial v} + Z \frac{\partial e}{\partial w} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

Diese Gleichungen lassen sich sofort integrieren und ergeben $A, B, \dots$ als Functionen von t , die man nur in 4) einzusetzen nöthig hat, um die Störungen $\delta x, \delta y, \delta z$ zu berechnen.

Hiermit ist die Aufgabe, die Gleichungen 1) zu integrieren, gelöst. Der folgenden Entwicklungen wegen wollen wir aber die Gleichungen 9) unter Benutzung der im § 10 entwickelten Principien noch etwas umformen. Die Gleichungen 58) dieses Paragraphen werden unter Benutzung der Formeln 62) und 63) in dem hier vorliegenden Falle:

$$15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta x = \frac{\partial a}{\partial u} \int \frac{\partial R}{\partial a} dt + \frac{\partial e}{\partial u} \int \frac{\partial R}{\partial e} dt + \dots \\ \delta y = \frac{\partial a}{\partial v} \int \frac{\partial R}{\partial a} dt + \frac{\partial e}{\partial v} \int \frac{\partial R}{\partial e} dt + \dots \\ \delta z = \frac{\partial a}{\partial w} \int \frac{\partial R}{\partial a} dt + \frac{\partial e}{\partial w} \int \frac{\partial R}{\partial e} dt + \dots \end{array} \right.$$

und schliesslich folgen noch aus 6) die Differentialquotienten der Störungen nach der Zeit, die folgerichtig mit δu , δv , δw zu bezeichnen sind:

$$16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta u = -\frac{\partial a}{\partial x} \int \frac{\partial R}{\partial a} dt - \frac{\partial e}{\partial x} \int \frac{\partial R}{\partial e} dt - \dots \\ \delta v = -\frac{\partial a}{\partial y} \int \frac{\partial R}{\partial a} dt - \frac{\partial e}{\partial y} \int \frac{\partial R}{\partial e} dt - \dots \\ \delta w = -\frac{\partial a}{\partial z} \int \frac{\partial R}{\partial a} dt - \frac{\partial e}{\partial z} \int \frac{\partial R}{\partial e} dt - \dots \end{array} \right.$$

Es ist bemerkenswerth, dass in jedem der sechs Integrale die untere Grenze willkürlich ist, so dass in 15) und 16) sechs willkürliche Constante neu hinzutreten. Dies ist von vornherein klar, da wir hier die Auflösungen des Systems 1) von der 6^{ten} Ordnung vor uns haben. Dieses System ist nun beim Uebergang zu den Störungen höherer und höherer Grade nach dem vorigen Paragraphen immer und immer wieder aufzulösen und man gelangt so zu der Reihenentwicklung 7) dieses Paragraphen, von der vorausgesetzt worden ist, dass sie convergent sei.

Es tritt hier der auf den ersten Augenblick sehr befremdende Umstand ein, dass wir in dieser Reihenentwicklung nicht allein mehr willkürliche Constante, als nothwendig sind, sondern sogar unzählig viele willkürliche Constante enthalten haben, ein Umstand, der zu manchen Controversen Veranlassung gegeben hat. Denn schon die erste Annäherung — die KEPLER'sche Ellipse — liefert die noth-

wendige Anzahl und daher, so meinte man, dürften in die Störungen keine neuen eingeführt werden, wie es LAPLACE z. B. in der Mécanique céleste im ersten Bande wirklich thut, wenn er sie auch sofort wieder, jedoch nur aus Zweckmässigkeitsrücksichten bestimmt. Doch kann man von vornherein die Legitimität einer unendlichen Anzahl willkürlicher Integrationsconstanten folgendermaassen beweisen:

Ist ein System von n Differentialgleichungen zwischen den $n+1$ Grössen $x_1 \dots x_{n+1}$ gegeben, so erhält man durch Integration n derselben $x_1 \dots x_n$ ausgedrückt durch die letzte x_{n+1} und eine hinreichende Anzahl willkürlicher Constanten $a_1 \dots a_\lambda$. Sind nun in den Differentialgleichungen noch eine gewisse Anzahl Parameter $p_1 \dots p_\mu$ enthalten, so werden diese in die Lösung eingehen und $x_1 \dots x_n$ somit Functionen von x_{n+1} , sowie von $a_1 \dots a_\lambda$ und $p_1 \dots p_\mu$. Da aber $a_1 \dots a_\lambda$ nur die Eigenschaft haben sollen, constant zu sein, so kann man sie durch willkürliche Functionen von $p_1 \dots p_\mu$ ersetzen, und, da man in diese Functionen noch unzählig viele willkürliche Constante einführen kann, die Auflösung so darstellen, dass sie in der That unzählig viele willkürliche Constante enthält.

Im Grunde genommen geht ein System von totalen Differentialgleichungen sofort in ein System von partiellen Differentialgleichungen über, wenn in ihnen gewisse Parameter vorkommen und man sein Augenmerk auf die Art des Eingehens dieser Parameter in die Lösung richtet. Ist z. B. die Differentialgleichung $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, p\right)$ gegeben und $y = \varphi(x, p)$ die gesuchte Function, so sind x und p als die beiden unabhängigen Variablen anzusehen und die Differentialgleichung als eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, nur dass in ihr von den beiden partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial p}$ allein der erstere vorkommt.

Somit sehen wir, dass das Auftreten unendlich vieler Integrationsconstanten (die natürlich sich schliesslich auf die nothwendige Anzahl zurückführen lassen müssen) in der Natur der Methode durchaus begründet ist. Die einzige Beschränkung in der Theorie der absoluten Störungen besteht darin, dass ihre Summe convergiren muss.

Um das Verfahren zu einem eindeutig bestimmten zu machen, muss man also noch ein specielles Gesetz angeben, welches die Unbestimmtheit in der Wahl der Constanten aufhebt. Ein solches besteht z. B. darin, dass alle Störungen und deren Differentialquotienten nach der Zeit für einen bestimmten Zeitpunkt t_0

verschwinden sollen. Es wird dies, wie ein Blick auf die Gleichungen 15) und 16) lehrt, bewirkt, wenn man alle Integrale mit der Grenze t_0 anfangen lässt, so dass sie die bestimmte Form annehmen:

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial R}{\partial a} dt, \quad \int_{t_0}^t \frac{\partial R}{\partial e} dt, \quad \dots$$

Die Form, unter welcher jetzt die Störungen erscheinen, nennt man speciell, insofern als sie für einen bestimmten Zeitpunkt t_0 als Anfangspunkt gezählt werden. Diese speciellen Störungen haben den ersten Begründern der Theorie vorgeschwebt. Stellt man sich nämlich in einem Augenblick t_0 und die Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten als gegeben vor, so sind die Elemente $a, e, \dots$ dadurch bestimmt. In der so für jeden Planeten charakterisirten Ellipse würde er sich beständig bewegen, wenn die Störungsfunctionen nicht vorhanden wären. Diese bewirken in jedem Moment eine Abweichung von dem Ort, welchen der Planet einnehmen würde und diese Abweichung nannte man Störung, während in der allgemeinen Störungstheorie die ursprünglich zu Grunde gelegte Ellipse durchaus nicht eine solche zu sein braucht, in welcher der Planet auch nur einen Augenblick verweilt, wenn man auch der Convergenz wegen eine Ellipse wählen wird, die für den fraglichen Zeitraum, über welchen die Integration sich zu erstrecken hat, der wirklichen Bahn ziemlich nahe kommt.

So viel dem Verfasser bekannt, hat zum ersten Male durchaus klar und unzweideutig das Auftreten unzählig vieler Integrationsconstanten in der Theorie der absoluten Störungen JACOBI hervorgehoben. (Auszug zweier Schreiben an HANSEN, CRELLE's Journal, Bd. 42.)

Wie bei der Begründung auseinander gesetzt worden, beruht die Theorie der absoluten Störungen auf der Annahme, dass die Reihenentwicklung convergent ist. Wann aber, d. h. bis für welchen Zeitpunkt und für welches Gesetz in der Wahl der Integrationsconstanten ist diese Entwicklung nun convergent? Zur Beantwortung dieser Frage sind so gut wie gar keine, wenn nicht wirklich gar keine Untersuchungen angestellt worden. Bekanntlich nahm man es in früheren Zeiten nicht so genau mit den Convergenzbetrachtungen, heute spielen sie aber mit Recht eine grosse Rolle und deshalb liegt in dem Fehlen des Convergenzbeweises, oder, wie ich lieber sagen will, in dem Fehlen der Anwendung der Convergenzbeweise auf den

hier vorliegenden Fall ein Mangel. Es wird Niemand einfallen, hieraus den genialen Begründern der Theorie einen Vorwurf machen zu wollen, vielmehr ist es ja eher ein Vorrecht des Genies, manches vorweg zu nehmen, was späteren Zeiten vorbehalten bleibt, fest zu begründen.

Wenn nun auch ein strenger Beweis für die Convergenz fehlt, so ist ihr Vorhandensein für eine ziemlich lange Zeit doch sehr wahrscheinlich. Halten wir uns z. B. an die speciellen Störungen. Diese, so wie ihre ersten Ableitungen werden für $t = t_0$ sämmtlich $= 0$. Die Störungen n^{ten} Grades werden ganze homogene Functionen n^{ten} Grades der störenden Massen und daher ist es der Kleinheit dieser Massen wegen wahrscheinlich, dass für nicht zu grosse Zeitintervalle die Störungen mit dem Grade immer kleiner werden.

Da die Integrale von t_0 bis t gehen, so folgt, dass im Allgemeinen mit wachsendem t die Störungen immer grösser und grösser werden und es ist ziemlich, wenn nicht ganz sicher, dass schliesslich die Convergenz aufhört. Man muss deshalb auch hier ein sehr langes Zeitintervall in Stufen theilen und jede Stufe für sich nehmen.

Der Vorzug der Theorie der absoluten Störungen beruht auf der Kleinheit der störenden Massen, nach deren Potenzen und Producten die Störungen geordnet sind. Sie werden also, wie auch die Praxis lehrt, zunächst bedeutend rascher und dann auch viel länger convergiren, wie die nach den Potenzen von t geordneten Entwicklungen, bei denen der Vortheil der Kleinheit der störenden Massen ganz verloren geht. In der Praxis nehmen die Astronomen bei einer wirklichen Ausführung der Rechnung die Zeitintervalle klein genug, dass sie sich mit den Störungen ersten Grades und den grössten Gliedern derjenigen zweiten Grades begnügen können.

Schliesslich wollen wir noch die Störungen ersten Grades, welche zugleich die wichtigsten sind, in eine sehr einfache und elegante analytische Form bringen. Aus § 21 folgt, dass hier die Grössen X, Y, Z ohne weitere Entwicklung gegeben sind, dass sie in $\frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ übergehen, wenn man für die Coordinaten die ersten Glieder der rechten Seiten von 8), also die sogenannten elliptischen Werthe einsetzt. Die in diesem Paragraphen Nr. 11) eingeführte symbolische Grösse R ist hier also wirklich vorhanden und zwar ist sie die Störungsfunction, wenn man in diese für die Coordinaten ihre elliptischen Werthe setzt. Die Integrale, welche in 15) und 16) stehen, sind nun so zu berechnen, dass man R als Function der Elemente $a, e, \dots$ und t aus-

drückt, darauf nach den Elementen differentiirt und dann nach t zwischen den Grenzen t_0 und t integrirt. Wir wollen in allen Integralen dieselbe untere Grenze t_0 wählen, also die speciellen Störungen voraussetzen. Man kann aber offenbar (nach der Regel des Differentiirens unter dem Integralzeichen) erst nach t integriren und dann nach den Elementen $a, e, \dots$ differentiiren. Führt man also die Bezeichnung ein:

$$17) \quad \int_{t_0}^t R_\lambda \cdot dt = U_\lambda,$$

so werden die Gleichungen 15) und 16):

$$18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta x_1 = \frac{\partial U_1}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial a_1}{\partial u_1} + \frac{\partial U_1}{\partial e_1} \cdot \frac{\partial e_1}{\partial u_1} + \dots \\ \delta y_1 = \frac{\partial U_1}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial a_1}{\partial v_1} + \dots \\ \delta z_1 = \frac{\partial U_1}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial a_1}{\partial w_1} + \dots \\ \delta u_1 = - \frac{\partial U_1}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial a_1}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial e_1} \cdot \frac{\partial e_1}{\partial x_1} - \dots \\ \delta v_1 = - \frac{\partial U_1}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial a_1}{\partial y_1} - \dots \\ \delta w_1 = - \frac{\partial U_1}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial a_1}{\partial z_1} - \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

Diese Formeln lassen sich aber noch weiter zusammenziehen. Die U sind so, wie sie aus der Integration 17) hervorgehen, gegeben als Functionen von $t, t_0, a_1, e_1, \dots a_2, e_2, \dots$. Denkt man sich statt der Elemente wieder rückwärts ihre Ausdrücke durch die (elliptischen) Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten eingesetzt, so werden die Gleichungen 18) einfach:

$$19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta x_\lambda = \frac{\partial U_\lambda}{\partial u_\lambda}, \quad \delta y_\lambda = \frac{\partial U_\lambda}{\partial v_\lambda}, \quad \delta z_\lambda = \frac{\partial U_\lambda}{\partial w_\lambda} \\ \delta u_\lambda = - \frac{\partial U_\lambda}{\partial x_\lambda}, \quad \delta v_\lambda = - \frac{\partial U_\lambda}{\partial y_\lambda}, \quad \delta w_\lambda = - \frac{\partial U_\lambda}{\partial z_\lambda} \end{array} \right. (\lambda = 1, \dots n).$$

Diese Gleichungen ergeben also die Lösung in folgender merkwürdig einfachen analytischen Form:

Man integriere die Störungsfunction nach der Zeit, zwischen den Grenzen t_0 und t , indem man für die Coordinaten ihre elliptischen Werthe, ausgedrückt durch die Elemente und die Zeit, einsetzt. In dem Integral drücke man die Elemente (wenigstens desjenigen Planeten, zu dem die Störungsfunction gehört) rückwärts wieder durch die Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten aus. Dann sind die Störungen der Coordinaten die Differentialquotienten dieses Integrals nach den Geschwindigkeitscomponenten. Ferner sind die Differentialquotienten der Störungen der Coordinaten, also die Störungen der Geschwindigkeitscomponenten, die negativ genommenen Differentialquotienten dieses Integrals nach den Coordinaten.

Somit sind sämtliche Störungen eines Planeten auf ein Integral 17) zurückgeführt worden, welches man wohl das Integral der Störungsfunction nennen könnte.

§ 23.

Andere Formeln zur Berechnung der absoluten Störungen.

So elegant die entwickelten Formeln des vorigen Paragraphen und namentlich die Formeln 19) für die Störungen ersten Grades sind, so sind sie doch weniger für die praktische Berechnung geeignet, als diejenigen, welche LAPLACE in der *Mécanique céleste*, Tome I, pag. 281 aufstellt. Wir wollen diese Formeln jetzt ableiten.

Nimmt man der Einfachheit wegen die ursprüngliche Bahnebene als xy Ebene, so wird das (elliptische) $z = 0$ und die letzte der Gleichungen 1) des vorigen Paragraphen wird:

$$1) \quad \frac{d^2 \delta z}{dt^2} = -\mu \cdot \frac{\delta z}{r^3} + Z.$$

Für $Z = 0$ würde die allgemeine Lösung von 1) lauten:

$$2) \quad \delta z = Ax + By.$$

Diese Form wird auch für δz beibehalten, wenn Z eine gegebene Function von t ist, nur dass jetzt A und B zu bestimmende Functionen von t vorstellen. Als eine Differentialgleichung zwischen ihnen wählen wir:

$$3) \quad 0 = \frac{dA}{dt} x + \frac{dB}{dt} y,$$

so dass aus 2) durch Differentiation entsteht:

$$4) \quad \frac{d\delta z}{dt} = A \frac{dx}{dt} + B \frac{dy}{dt}$$

und:

$$5) \quad \frac{d^2 \delta z}{dt^2} = A \frac{d^2 x}{dt^2} + B \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dA}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dB}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} \\ = -A \mu \frac{x}{r^3} - B \mu \frac{y}{r^3} + \frac{dA}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dB}{dt} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Durch Einsetzen von 2) und 5) in 1) folgt endlich:

$$6) \quad \frac{dA}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dB}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} = Z,$$

aus 3) und 6) ergibt sich nun:

$$7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{dt} = - \frac{yZ}{x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}} = - \frac{yZ}{\sqrt{\mu \cdot a(1-e^2)}}, \\ \frac{dB}{dt} = \frac{xZ}{x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}} = \frac{xZ}{\sqrt{\mu \cdot a(1-e^2)}}, \end{array} \right.$$

und daher, wenn man sich auf Störungen ersten Grades beschränkt, für welche $Z = \frac{\partial R}{\partial z}$ ist:

$$8) \quad A = - \frac{\int y \frac{\partial R}{\partial z} dt}{\sqrt{\mu \cdot a(1-e^2)}}, \quad B = \frac{\int x \frac{\partial R}{\partial z} dt}{\sqrt{\mu \cdot a(1-e^2)}},$$

und somit erhalten wir:

$$9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta z = \frac{y \int x \frac{\partial R}{\partial z} dt - x \int y \frac{\partial R}{\partial z} dt}{\sqrt{\mu \cdot a(1-e^2)}}, \\ \frac{d\delta z}{dt} = \frac{\frac{dy}{dt} \int x \frac{\partial R}{\partial z} dt - \frac{dx}{dt} \int y \frac{\partial R}{\partial z} dt}{\sqrt{\mu \cdot a(1-e^2)}}, \end{array} \right.$$

Um die weitere Integration der Gleichungen 1) vorzunehmen, ist es zweckmässig, zunächst die Verbindung:

$$10) \quad x\delta x + y\delta y = P$$

zu betrachten. Durch zweimalige Differentiation von P erhält man unter Anwendung der Gleichungen 1) des vorigen Paragraphen, in welchen $z = 0$ zu setzen ist:

$$11) \quad \frac{d^2 P}{dt^2} = \frac{\mu \cdot P}{r^3} + 2 \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d\delta x}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d\delta y}{dt} \right) + X \cdot x + Y \cdot y.$$

Setzt man noch:

$$12) \quad \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d\delta x}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d\delta y}{dt} = Q,$$

so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2 \delta x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2 \delta y}{dt^2} + \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \frac{d\delta x}{dt} + \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \frac{d\delta y}{dt} \\ &= -\mu \cdot \frac{\left(\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y \right)}{r^3} + 3\mu \cdot \frac{r \frac{dr}{dt}}{r^5} \cdot P \\ &\quad - \mu \cdot \frac{x \frac{d\delta x}{dt} + y \frac{d\delta y}{dt}}{r^3} + X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} \\ 13) \quad &= \frac{d \left(-\frac{\mu \cdot P}{r^3} \right)}{dt} + X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt}, \end{aligned}$$

und durch sofortige Integration:

$$14) \quad Q = -\frac{\mu \cdot P}{r^3} + \int^t (X dx + Y dy).$$

Gleichung 11) geht daher über in:

$$15) \quad \frac{d^2 P}{dt^2} = -\frac{\mu \cdot P}{r^3} + Xx + Yy + 2 \int^t (X dx + Y dy).$$

Nun ist:

$$x = a \cdot \frac{\partial x}{\partial a}, \quad y = a \cdot \frac{\partial y}{\partial a}$$

und also:

$$\begin{aligned} Xx + Yy &= a \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial a} \right) = a \frac{dR}{da} \\ X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} &= n \left(\frac{\partial R}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial R}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \right) = n \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}. \end{aligned}$$

Setzt man noch zur Abkürzung:

$$16) \quad W = a \cdot \frac{\partial R}{\partial a} + 2n \int \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} dt,$$

so wird die Gleichung 15):

$$17) \quad \frac{d^2 P}{dt^2} = - \frac{\mu \cdot P}{r^3} + W.$$

Diese Gleichung ist von genau derselben Form, wie die Gleichung 1), sie wird also in derselben Weise integrirt, wie diese, so dass man erhält:

$$18) \quad \left\{ \begin{aligned} P &= \frac{y \int x W dt - x \int y W dt}{\sqrt{\mu \cdot a (1 - e^2)}}, \\ \frac{dP}{dt} &= \frac{\frac{dy}{dt} \int x W dt - \frac{dx}{dt} \int y W dt}{\sqrt{\mu \cdot a (1 - e^2)}}. \end{aligned} \right.$$

Somit haben wir der Gleichung 10) wegen eine Relation zwischen δx und δy . Um eine andere zu erhalten, betrachte man den Ausdruck:

$$19) \quad S = \frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y.$$

Durch Differentiation folgt:

$$\frac{dS}{dt} = - \frac{\mu}{r^3} \cdot P + Q,$$

also nach 17) und 14):

$$\frac{dS}{dt} = 2 \frac{d^2 P}{dt^2} - 2a \frac{\partial R}{\partial a} - 3n \int \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} dt,$$

und durch Integration:

$$20) \quad S = 2 \frac{dP}{dt} - 2a \int \frac{\partial R}{\partial a} dt - 3n \iint \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} dt dt,$$

in welche Formel für $\frac{dP}{dt}$ sein Werth aus 18) einzusetzen ist. Schliesslich folgen nach der Bestimmung von P und S die Störungen:

$$21) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta x &= \frac{P \frac{dy}{dt} - Sy}{\sqrt{\mu \cdot a (1 - e^2)}} \\ \delta y &= \frac{-P \frac{dx}{dt} + Sx}{\sqrt{\mu \cdot a (1 - e^2)}}. \end{aligned} \right.$$

Damit sind die Störungen berechnet. Führt man noch Polar-coordinaten r, v, φ durch die Gleichungen ein:

$$x = r \cdot \cos v \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin v \cdot \cos \varphi, \quad z = r \cdot \sin \varphi,$$

so erhält man, weil $\varphi = 0$ ist, wenn man sich auf die Störungen ersten Grades beschränkt:

$$\delta x = \cos v \delta r - r \sin v \delta v,$$

$$\delta y = \sin v \delta r + r \cos v \delta v,$$

$$\delta z = r \cdot \delta \varphi,$$

also:

$$\delta r = \cos v \delta x + \sin v \delta y = \frac{P}{r},$$

$$\delta v = \frac{-\sin v \delta x + \cos v \delta y}{r} = \frac{-y \delta x + x \delta y}{r^2} = \frac{-P \cdot \frac{r \cdot dr}{dt} + S r^2}{r^2 \sqrt{\mu \cdot a (1 - e^2)}},$$

und somit:

$$22) \left\{ \begin{aligned} \delta r &= \frac{\sin v \int^t r \cos v W dt - \cos v \int^t r \sin v W dt}{\sqrt{\mu \cdot a (1 - e^2)}}, \\ \delta v &= \frac{-\frac{dr}{dt} \delta r + 2 \cdot \frac{d(r \delta r)}{dt} - 2 \int^t a \frac{\partial R}{\partial a} dt - 3 \iint^t \left(n \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} dt \right) dt}{\sqrt{\mu \cdot a (1 - e^2)}}, \\ \delta \varphi &= \frac{\sin v \int^t r \cos v \frac{\partial R}{\partial z} dt - \cos v \int^t r \sin v \frac{\partial R}{\partial z} dt}{\sqrt{\mu \cdot a (1 - e^2)}}, \end{aligned} \right.$$

Man pflegt r den Radiusvector, v die Länge und φ die Breite des Planeten zu nennen. Die Gleichungen 22) liefern die Endausdrücke für die Störungen dieser Coordinaten.

Wir haben in dem vorigen und in diesem Paragraphen zwei von einander verschiedene Methoden entwickelt, um die Störungen zu berechnen und sind dabei zu Resultaten gelangt, die dem Anschein nach durchaus verschieden zu sein scheinen. So z. B. kommen in den Gleichungen 15) des vorigen Paragraphen nur einfache Integrale vor, während in 22) dieses Paragraphen die Grösse $\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$ zweimal integriert wird. Aber auch davon abgesehen sind die Formeln so durchaus ver-

schieden, dass es durchaus nicht ohne Weiteres gelingt, direkt das eine System in das andere zu verwandeln. Wir wollen sehen, worin der eigentliche Grund dieser Thatsache liegt, und welche Wege man einschlagen muss, um die Identität dieser beiden Systeme nachzuweisen.

Zunächst hat man zu berücksichtigen, dass in den Formeln 15) des vorigen Paragraphen der Ausdruck $\frac{\partial R}{\partial a}$ vollständig zu nehmen ist, insofern, als auch zu berücksichtigen ist, dass a in R nicht allein explicite, sondern auch in der Verbindung $\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} t + \varepsilon$ vorkommt. Bezeichnet man zur besseren Unterscheidung den vollständigen Differentialquotienten mit einer Klammer, so folgt also:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial a} \right) = \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{3}{2} \frac{n}{a} \cdot t \cdot \frac{\partial R}{\partial \varepsilon},$$

und daher:

$$\int \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right) dt = \int \frac{\partial R}{\partial a} dt - \frac{3n}{2a} \int t \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} dt.$$

Nun ist:

$$\int t \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} dt = t \int \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} dt - \int \left(\int \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} dt \right) dt,$$

und sehen wir, dass man in die Formeln 15) des vorigen Paragraphen auch doppelte Integrationen einführen kann. Doch selbst, wenn dies geschieht, kann man doch nicht die Formeln 15) in die Formeln 22) verwandeln. Die Brücke, welche diese beiden Systeme verbindet, wird aus drei partiellen Differentialgleichungen gebildet, denen die Grösse R , als Function der Elemente $a, e, \Omega, i, \pi, \varepsilon$ aufgestellt, genügt. R ist nämlich ursprünglich als eine Function der Coordinaten gegeben, in welcher die Geschwindigkeiten nicht vorkommen. Denkt man sich demnach R ausgedrückt als Function von t und der Elemente $a, e, \dots$, so müssen rückwärts, wenn man die Elemente wieder durch die Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten ersetzt, die letzteren herausfallen. In diesem Sinne folgt also:

$$23) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{\partial R}{\partial u} = \frac{\partial R}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial R}{\partial e} \cdot \frac{\partial e}{\partial u} + \dots \\ 0 = \frac{\partial R}{\partial v} = \frac{\partial R}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial v} + \frac{\partial R}{\partial e} \cdot \frac{\partial e}{\partial v} + \dots \\ 0 = \frac{\partial R}{\partial w} = \frac{\partial R}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial w} + \frac{\partial R}{\partial e} \cdot \frac{\partial e}{\partial w} + \dots \end{array} \right.$$

In diese Ausdrücke hat man für $\frac{\partial a}{\partial u}$, $\frac{\partial e}{\partial u}$, . . . ihre Werthe als Functionen der Elemente und der Zeit eingesetzt zu denken, um die erwähnten drei partiellen Differentialgleichungen für die Function R zu erhalten. (Diese partiellen Differentialgleichungen gelten natürlich ohne Unterschied für jede Störungsfunction und die Elemente jedes Planeten.)

Mit Hilfe der Gleichungen 23) kann man nun die beiden verschiedenen Formen für die Störungen mit einander identificiren. Uebrigens ist klar, dass man die Formeln 23) benutzen kann, um die Störungen auf sehr mannigfaltige Arten und Weisen darzustellen.

Will man nun die Störungsformeln 22) in einem speciellen Fall anwenden, so kann man zwei verschiedene Wege einschlagen. Man kann erstens die Integrale mechanisch auswerthen, indem man die Grössen X , Y , Z und die Coordinaten für gleichweit von einander abstehende Zeitintervalle (etwa von 10 zu 10 Tagen) berechnet und dann die bekannten Formeln für angenäherte mechanische Quadraturen anwendet.

Dieses Verfahren, bei welchem man von jeder analytischen Entwicklung absieht, giebt dann nur numerische Resultate und eignet es sich besonders für Kometen und Asteroiden, für welche, ihrer grossen Neigungen und Excentricitäten wegen, die analytischen Entwicklungen zu umfangreich werden würden.

Das andere Verfahren besteht darin, dass man die analytischen Ausdrücke der Störungen zu berechnen unternimmt. Diese hängen von der Störungsfunction ab, welche in Glieder zerfällt, von denen jedes nur die Coordinaten zweier Planeten, des störenden und des gestörten enthält. Da in den Formeln 15), § 22, nur die Differentialquotienten der Störungsfunction nach den Elementen enthalten sind, so handelt es sich also darum, zu untersuchen, wie die Störungsfunction sich als Function dieser Elemente und der Zeit darstellt, eine Untersuchung, die wir im folgenden Paragraphen vornehmen wollen.

§ 24.

Analytische Entwicklung der Störungsfunction.

Mit der analytischen Entwicklung der Störungsfunction haben sehr viele Astronomen und Mathematiker sich beschäftigt. Hier ist das Verfahren, welches LEVERRIER in den *Recherches astronomiques* eingehalten hat, zu Grunde gelegt worden. Die Störungsfunction R

besteht nach § 21, 3), aus Gliedern, die nur von den Coordinaten zweier Planeten abhängen und welche zwei verschiedene Formen zeigen. Die erste dieser beiden Formen ist:

$$1) \quad r_{12}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}},$$

Die zweite ist:

$$2) \quad Q = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{(\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2})^3}.$$

Wir beabsichtigen, diese beiden Functionen im Folgenden nach steigenden Potenzen der Excentricitäten und Neigungen zu entwickeln, weil diese nur kleine Grössen sind. Zunächst wollen wir sie etwas umformen.

Setzt man in 23), § 2, der Kürze wegen:

$$3) \quad v + \pi - \Omega = \omega,$$

so erhält man:

$$4) \quad \begin{cases} x = r \left[\cos(\Omega + \omega) \cdot \cos^2 \frac{i}{2} + \cos(\Omega - \omega) \cdot \sin^2 \frac{i}{2} \right], \\ y = r \left[\sin(\Omega + \omega) \cdot \cos^2 \frac{i}{2} + \sin(\Omega - \omega) \cdot \sin^2 \frac{i}{2} \right], \\ z = r \cdot \sin \omega \cdot \sin i, \end{cases}$$

und daher:

$$\begin{aligned} x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = r_1 r_2 & \left[\cos^2 \frac{i_1}{2} \cdot \cos^2 \frac{i_2}{2} \cdot \cos(\Omega_1 - \Omega_2 + \omega_1 - \omega_2) \right. \\ & + \cos^2 \frac{i_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{i_2}{2} \cdot \cos(\Omega_1 - \Omega_2 + \omega_1 + \omega_2) \\ & + \sin^2 \frac{i_1}{2} \cdot \cos^2 \frac{i_2}{2} \cdot \cos(\Omega_2 - \Omega_1 + \omega_2 + \omega_1) \\ & + \sin^2 \frac{i_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{i_2}{2} \cdot \cos(\Omega_1 - \Omega_2 - \omega_1 + \omega_2) \\ & + \frac{\sin i_1 \cdot \sin i_2}{2} \cdot \cos(\omega_1 - \omega_2) \\ & \left. - \frac{\sin i_1 \cdot \sin i_2}{2} \cdot \cos(\omega_1 + \omega_2) \right], \end{aligned}$$

oder:

$$2(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) = r_1 r_2 [m \cos(\omega_1 - \omega_2) + n \sin(\omega_1 - \omega_2) + o \cos(\omega_1 + \omega_2) + p \sin(\omega_1 + \omega_2)],$$

wo:

$$\begin{aligned} m &= (1 + \cos i_1 \cdot \cos i_2) \cos(\Omega_1 - \Omega_2) + \sin i_1 \cdot \sin i_2, \\ n &= -(\cos i_1 + \cos i_2) \sin(\Omega_1 - \Omega_2), \\ o &= (1 - \cos i_1 \cdot \cos i_2) \cos(\Omega_1 - \Omega_2) - \sin i_1 \cdot \sin i_2, \\ p &= -(\cos i_1 - \cos i_2) \sin(\Omega_1 - \Omega_2). \end{aligned}$$

Die vier Grössen m, n, o, p hängen von den drei Winkeln $i_1, i_2, (\Omega_1 - \Omega_2)$ ab. Es muss also zwischen ihnen eine Relation stattfinden. Führt man noch die Neigung J der beiden Bahnebenen gegen einander ein, so ist:

$$5) \quad \cos J = \cos i_1 \cdot \cos i_2 + \sin i_1 \cdot \sin i_2 \cdot \cos(\Omega_1 - \Omega_2),$$

und leichte Reductionen ergeben:

$$m^2 + n^2 = (1 + \cos J)^2 = 4 \cos^4 \frac{J}{2},$$

$$o^2 + p^2 = (1 - \cos J)^2 = 4 \sin^4 \frac{J}{2},$$

folglich:

$$\sqrt{m^2 + n^2} + \sqrt{o^2 + p^2} = 2.$$

Führt man nun noch zwei Winkel Π_1 und Π_2 (nämlich die Winkel, welche die Knoten der Bahnebenen und der xy Ebene mit dem gemeinsamen Knoten der ersteren bilden) durch die Gleichungen ein:

$$6) \quad \begin{cases} \cos(\Pi_1 - \Pi_2) = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} = \frac{(1 + \cos i_1 \cdot \cos i_2) \cdot \cos(\Omega_1 - \Omega_2) + \sin i_1 \cdot \sin i_2}{1 + \cos J}, \\ \sin(\Pi_1 - \Pi_2) = -\frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} = \frac{(\cos i_1 + \cos i_2) \cdot \sin(\Omega_1 - \Omega_2)}{1 + \cos J}, \\ \cos(\Pi_1 + \Pi_2) = \frac{o}{\sqrt{o^2 + p^2}} = \frac{(1 - \cos i_1 \cdot \cos i_2) \cdot \cos(\Omega_1 - \Omega_2) - \sin i_1 \cdot \sin i_2}{1 - \cos J}, \\ \sin(\Pi_1 + \Pi_2) = -\frac{p}{\sqrt{o^2 + p^2}} = \frac{(\cos i_1 - \cos i_2) \cdot \sin(\Omega_1 - \Omega_2)}{1 - \cos J}, \end{cases}$$

so folgt endlich:

$$7) \quad x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[\cos[\omega_1 + \Pi_1 - (\omega_2 + \Pi_2)] \cos^2 \frac{J}{2} + \cos(\omega_1 + \Pi_1 + \omega_2 + \Pi_2) \sin^2 \frac{J}{2} \right],$$

und daher, wenn man noch der Kürze wegen setzt:

$$8) \quad \omega_1 + \Pi_1 - (\omega_2 + \Pi_2) = V,$$

$$9) \quad \omega_1 + \Pi_1 + \omega_2 + \Pi_2 = W,$$

Wegen der Kleinheit von z wird man nur wenige Glieder dieser Entwicklung gebrauchen. Um schliesslich zu der Form 12) zu gelangen, hat man zunächst die Potenzen von $(\cos V - \cos W)$ in $\cos$ der vielfachen Winkel aufzulösen. Man findet:

$$16) \quad \begin{cases} 2(\cos V - \cos W)^2 = 2 + \cos 2V + \cos 2W - 2\cos(V - W) \\ \quad \quad \quad - 2\cos(V + W), \\ 4(\cos V - \cos W)^3 = 9\cos V - 9\cos W + \cos 3V - \cos 3W \\ \quad \quad \quad - 3\cos(2V + W) + 3\cos(V + 2W) \\ \quad \quad \quad - 3\cos(2V - W) + 3\cos(V - 2W). \end{cases}$$

Es sei ferner:

$$17) \quad \varphi^{-\frac{n}{2}} = (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos V)^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (n^\lambda) \cos(\lambda V).$$

Diese Formel, in der

$$18) \quad (n^\lambda) = (n^{-\lambda})$$

angenommen wird, ist für die analytische Entwicklung der Störungsfunktion grundlegend und werden wir uns deshalb im nächsten Paragraphen eingehend mit ihr beschäftigen.

Ist nun φ ein beliebiger Winkel, so ist offenbar:

$$\cos \varphi \cdot \frac{1}{2} \sum (n^\lambda) \cos \lambda V = \frac{1}{4} \sum (n^\lambda) (\cos \lambda V + \varphi) + \frac{1}{4} \sum (n^\lambda) \cos(-\lambda V + \varphi).$$

Die beiden Glieder rechts sind aber einander gleich, wie man sofort aus 18) erkennt, wenn man im zweiten Gliede λ mit $-\lambda$ vertauscht. Unter Anwendung von 16) und 17) geht daher 15) über in:

$$\begin{aligned} r_{12}^{-1} &= \frac{1}{2} \sum (1^\lambda) \cos \lambda V \\ &\quad - \frac{1}{2} z r_1 \cdot r_2 \sum (3^\lambda) [\cos(\lambda + 1)V - \cos(\lambda V + W)] \\ &\quad + \frac{3}{8} z^2 r_1^2 \cdot r_2^2 \sum (5^\lambda) [2\cos \lambda V + \cos(\lambda + 2)V + \cos(\lambda V + 2W) \\ &\quad \quad - 2\cos((\lambda + 1)V - W) - 2\cos((\lambda + 1)V + W)] \\ &\quad - \frac{5}{16} z^3 r_1^3 \cdot r_2^3 \sum (7^\lambda) [9\cos(\lambda + 1)V - 9\cos(\lambda V + W) + \cos(\lambda + 3)V \\ &\quad \quad - \cos(\lambda V + 3W) - 3\cos((\lambda + 2)V + W) \\ &\quad \quad + 3\cos((\lambda + 1)V + 2W) - 3\cos((\lambda + 2)V - W) \\ &\quad \quad + 3\cos((\lambda + 1)V - 2W)]. \end{aligned}$$

Vertauscht man überall da, wo $(\lambda + 1)$, $(\lambda + 2)$, $(\lambda + 3)$ steht, den Summenindex λ mit $(\lambda - 1)$, $(\lambda - 2)$, $(\lambda - 3)$ und dann noch, wo W einen negativen Coefficienten besitzt, λ mit $-\lambda$, so kann man einfach schreiben:

$$19) \quad r_{12}^{-1} = \sum A^\lambda \cos \lambda V \\ + \sum B^\lambda \cos (\lambda V + W) \\ + \sum C^\lambda \cos (\lambda V + 2W) \\ + \sum D^\lambda \cos (\lambda V + 3W) \\ + \dots$$

wo:

$$20) \quad \left\{ \begin{aligned} A^\lambda &= \frac{1}{2} (1^\lambda) - \frac{z}{2} r_1 \cdot r_2 (3^\lambda - 1) + \frac{3z^2}{8} r_1^2 \cdot r_2^2 [2(5^\lambda) + (5^{\lambda-2})] \\ &\quad - \frac{5z^3}{16} r_1^3 \cdot r_2^3 [9(7^\lambda - 1) + (7^{\lambda-3})] + \dots \\ B^\lambda &= \frac{z}{2} r_1 \cdot r_2 (3^\lambda) - \frac{3z^2}{4} r_1^2 \cdot r_2^2 [(5^{\lambda-1}) + (5^{\lambda+1})] \\ &\quad + \frac{5z^3}{16} r_1^3 \cdot r_2^3 [3(7^{\lambda+2}) + 9(7^\lambda) + 3(7^{\lambda-2})] + \dots \\ C^\lambda &= \frac{3z^2}{8} r_1^2 \cdot r_2^2 (5^\lambda) - \frac{15z^3}{16} r_1^3 \cdot r_2^3 [(7^{\lambda+1}) + (7^{\lambda-1})] + \dots \\ D^\lambda &= \frac{5z^3}{16} r_1^3 \cdot r_2^3 (7^\lambda) + \dots \\ &\dots \end{aligned} \right.$$

Löst man in 19) die Coefficienten $A, B, \dots$ in ihre Reihen 20) auf, so erhält man schliesslich folgende Entwicklung:

$$21) \quad r_{12}^{-1} = \sum k_{\alpha, \lambda, \beta} \cdot z^\alpha \cdot \cos (\lambda V + \beta W),$$

wo die k nur noch Functionen von r_1 und r_2 sind, λ und β alle möglichen positiven und negativen Zahlen annehmen können [wenn man will, kann man β stets positiv oder 0 annehmen, da $\cos x = \cos (-x)$] und α eine ganze positive Zahl bedeutet, die der Bedingung genügt:

$$\alpha \geq [\beta].$$

In der Form 21) setzen wir jetzt r_{12}^{-1} voraus, um es weiter zu bearbeiten. Die k sind gewisse Functionen von r_1 und r_2 , also nicht constant. Es sei:

$$22) \quad r_1 = a_1 (1 + p_1), \quad r_2 = a_2 (1 + p_2),$$

wo p_1 und p_2 kleine Grössen vorstellen, die aus 7), § 4, zu bestimmen sind. p_1 und p_2 sind darnach Doppelreihen von der Form:

$$22a) \quad \begin{cases} p_1 = \sum k e_1^{\gamma_1} \cos(\delta_1 M_1), \\ p_2 = \sum k e_2^{\gamma_2} \cos(\delta_2 M_2), \end{cases}$$

wo die k reine Zahlen sind, δ_1 und δ_2 alle möglichen positiven und negativen ganzen Zahlen und γ_1 und γ_2 positive Zahlen vorstellen, für welche nach § 4:

$$\gamma_1 - [\delta_1], \quad \gamma_2 - [\delta_2]$$

gerade und positiv oder 0 ist.

Es sei ferner:

$$23) \quad v_1 = M_1 + q_1, \quad v_2 = M_2 + q_2,$$

so dass q_1 und q_2 nach 11), § 4, ebenfalls kleine Grössen sind und zwar von derselben Beschaffenheit wie p_1 resp. p_2 . Dann ist nach 8), 9) und 3):

$$24) \quad \begin{cases} V = V' + q_1 - q_2, \\ W = W' + q_1 + q_2, \end{cases}$$

wo:

$$25) \quad \begin{cases} V' = M_1 + \pi_1 - \Omega_1 + \Pi_1 - (M_2 + \pi_2 - \Omega_2 + \Pi_2), \\ W' = M_1 + \pi_1 - \Omega_1 + \Pi_1 + M_2 + \pi_2 - \Omega_2 + \Pi_2, \end{cases}$$

so dass also V' und W' lineare Functionen der Zeit werden.

Gleichung 21) geht somit über in:

$$26) \quad r_{12}^{-1} = \sum k \cdot z^\alpha \cdot \cos[\lambda V' + \beta W' + q_1(\lambda + \beta) + q_2(\beta - \lambda)].$$

Setzt man noch:

$$27) \quad \begin{cases} \lambda + \beta = h_1, \\ \beta - \lambda = h_2, \\ M_1 + \pi_1 - \Omega_1 + \Pi_1 = l_1, \\ M_2 + \pi_2 - \Omega_2 + \Pi_2 = l_2, \end{cases}$$

so geht obige Gleichung über in:

$$28) \quad r_{12}^{-1} = \sum k \cdot z^\alpha \cdot \cos(h_1 l_1 + h_2 l_2 + h_1 q_1 + h_2 q_2),$$

wo wegen 27) h_1 und h_2 entweder beide ungerade, oder beide gerade Zahlen sind.

Die Bedingung $\alpha \geq [\beta]$ geht hier über in:

$$29) \quad \alpha \geq \left[\frac{h_1 + h_2}{2} \right].$$

Um nun 28) weiter zu entwickeln, haben wir die vier kleinen Grössen

p_1, p_2, q_1, q_2 , von denen die beiden ersten in dem Coefficienten k , die beiden letzten in den Winkeln enthalten sind, zu berücksichtigen. Dies geschieht am besten auf folgende Art: r_{12}^{-1} und also auch die k sind homogene Functionen — 1^{ten} Grades von r_1 und r_2 . Bezeichnet man mit $k(a_1, a_2)$ das, was aus k wird, wenn man a_1 und a_2 an Stelle von r_1 und r_2 schreibt, so wird also:

$$k(a_1, a_2) = \frac{1}{a_1} \cdot k\left(1, \frac{a_2}{a_1}\right),$$

und:

$$\begin{aligned} k(r_1, r_2) &= k[a_1(1 + p_1), a_2(1 + p_2)] \\ &= \frac{1}{a_1(1 + p_1)} \cdot k\left(1, \frac{a_2(1 + p_2)}{a_1(1 + p_1)}\right) \\ &= \frac{1}{1 + p_1} \cdot k\left[a_1, a_2\left(1 + \frac{p_2 - p_1}{1 + p_1}\right)\right]. \end{aligned}$$

Bezeichnet man $k(a_1, a_2)$ jetzt der Kürze wegen mit k , so wird nach dem TAYLOR'schen Lehrsatz:

$$\begin{aligned} 30) \quad k(r_1, r_2) &= \frac{1}{1 + p_1} \left(k + \frac{p_2 - p_1}{1 + p_1} \cdot a_2 \cdot \frac{\partial k}{\partial a_2} + \frac{\left(\frac{p_2 - p_1}{1 + p_1}\right)^2 a_2^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\partial^2 k}{\partial a_2^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left(\frac{p_2 - p_1}{1 + p_1}\right)^3 a_2^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\partial^3 k}{\partial a_2^3} + \dots \right). \end{aligned}$$

Wenn man nun die Elemente beider Planeten trennen will, muss man die Potenzen von $(p_2 - p_1)$ entwickeln und kommt dann auf folgende zwei Formen:

$$\frac{p_1^r}{(1 + p_1)^s} \quad \text{und} \quad p_2^t,$$

wo r, s, t positive ganze Zahlen sind und $r < s$. r und t bilden den Grad, mit welchem die Entwicklung dieser Formen nach steigenden Potenzen der Excentricitäten beginnt. Wir haben also noch die kleinen Grössen q_1 und q_2 , welche in 28) eingehen, zu berücksichtigen.

Es ist:

$$\begin{aligned} 31) \quad &\left\{ \begin{aligned} \cos(h_1 l_1 + h_2 l_2 + h_1 q_1 + h_2 q_2) &= \cos(h_1 l_1 + h_2 l_2) \cdot \cos(h_1 q_1 + h_2 q_2) \\ &\quad - \sin(h_1 l_1 + h_2 l_2) \cdot \sin(h_1 q_1 + h_2 q_2). \end{aligned} \right. \\ &\text{Ferner:} \\ &\left\{ \begin{aligned} \cos(h_1 q_1 + h_2 q_2) &= \cos h_1 q_1 \cdot \cos h_2 q_2 - \sin h_1 q_1 \cdot \sin h_2 q_2, \\ \sin(h_1 q_1 + h_2 q_2) &= \sin h_1 q_1 \cdot \cos h_2 q_2 + \cos h_1 q_1 \cdot \sin h_2 q_2. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Setzt man also 30) und 31) in 28) ein, so sieht man, dass schliesslich die p_1, p_2, q_1, q_2 in folgenden vier verschiedenen Verbindungen auftreten:

$$32) \quad \begin{cases} \frac{p_1^r}{(1 + p_1)^s} \cdot \cos h_1 q_1, & \frac{p_1^r}{(1 + p_1)^s} \cdot \sin h_1 q_1, \\ p_2^t \cdot \cos h_2 q_2, & p_2^t \cdot \sin h_2 q_2. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke, in denen die h_1 und h_2 als unbestimmte ganze Zahlen beibehalten werden, hat LEVERRIER in Tabellen zusammengestellt, wobei er den siebenten Grad der Excentricitäten inclusive berücksichtigt hat. Die Entwicklungen von 32) befolgen dasselbe, in 22a) angegebene Gesetz, wie die von p und q . Setzen wir dieselben schliesslich in irgend ein Glied von 28):

$$33) \quad k z^\alpha \cos(h_1 l_1 + h_2 l_2 + h_1 q_1 + h_2 q_2),$$

so entsteht aus diesem eine vierfach unendliche Anzahl von Gliedern von der Form:

$$34) \quad K z^\alpha \cdot e_1^{\gamma_1} \cdot e_2^{\gamma_2} \cdot \cos(h_1 l_1 + h_2 l_2 + \delta_1 M_1 + \delta_2 M_2),$$

wo α, h_1, h_2 unverändert, wie in 28) bleiben, δ_1, δ_2 alle möglichen positiven und negativen ganzen Zahlen annehmen, γ_1, γ_2 positive Zahlen sind, die den Bedingungen genügen, dass:

$$\gamma_1 - [\delta_1] \quad \text{und} \quad \gamma_2 - [\delta_2]$$

gerade, positiv oder 0.

Auf diese Weise ist dann die Störungsfunction $r_{1,2}^{-1}$ nach steigenden Potenzen der drei Grössen:

$$z = \sin^2 \frac{J}{2}, \quad e_1, \quad e_2$$

entwickelt worden und zwar derartig, dass die Winkel:

$$h_1 l_1 + h_2 l_2 + \delta_1 M_1 + \delta_2 M_2$$

der Zeit proportional wachsen.

Unter Grad des Gliedes 34) pflegt man die Zahl

$$35) \quad g = 2\alpha + \gamma_1 + \gamma_2$$

zu verstehen. Nach 29) und 34) ist daher:

$$36) \quad g - [h_1 + h_2 + \delta_1 + \delta_2]$$

gerade, positiv oder 0.

Wenn man die verschiedenen Terme 33) systematisch zu berechnen unternimmt, so muss man sich eine bestimmte Grenze für den Grad stellen, über welchen man nicht hinausgehen will, so dass

man die Glieder vom höheren Grade vernachlässigt. Man kann dann die Störungsfunction:

$$37) \quad r_{12}^{-1} = \sum K z^\alpha e_1^{\gamma_1} e_2^{\gamma_2} \cos(h_1 l_1 + h_2 l_2 + \delta_1 M_1 + \delta_2 M_2)$$

in eine endliche Anzahl von einfach unendlichen Reihen auflösen. Denn ist n die gestellte Grenze für den Grad g , so folgt aus 35), dass α , γ_1 , γ_2 nur eine endliche Anzahl von Werthsystemen erhalten können, ebenso wie wegen 29) und 34) die Grössen $h_1 + h_2$, δ_1 , δ_2 .

Setzt man nun noch:

$$h_1 + h_2 = 2\Delta, \quad h_2 = 2\Delta - h_1$$

und schreibt dann einfach h an Stelle von h_2 , so ist, wenn ein passendes System von sechs Zahlen

$$38) \quad \alpha, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \Delta$$

gegeben ist, der Ausdruck:

$$39) \quad \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} K z^\alpha \cdot e_1^{\gamma_1} \cdot e_2^{\gamma_2} \cdot \cos[h l_1 - (h - 2\Delta) l_2 + \delta_1 M_1 + \delta_2 M_2],$$

wo nur h alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, das System 38) aber unveränderlich bleibt, eine solche einfach unendliche Reihe, wie sie vorhin erwähnt wurde und da es, wie wir eben gesehen, nur eine beschränkte Anzahl von Systemen 38) giebt, für welche der Grad $g \leq n$ ist, so haben wir, wenn 39) als ein Glied angesehen wird, die Störungsfunction in eine beschränkte Anzahl von Gliedern zerlegt. Dabei ist allerdings zu bemerken, dass in dem Ausdruck für K noch die unbestimmt gelassene ganze Zahl h enthalten ist.

Uebrigens ist es nicht schwer, die Anzahl der Glieder 39) zu bestimmen, deren Grad g gegeben ist. Wir haben zu dem Zweck nur die Anzahl Sg der Systeme 38) von sechs ganzen Zahlen zu bestimmen, die der Gleichung:

$$40) \quad g = 2\alpha + \gamma_1 + \gamma_2$$

und den Bedingungen genügen, dass:

$$41) \quad 2\alpha - [2\Delta], \quad \gamma_1 - [\delta_1], \quad \gamma_2 - [\delta_2]$$

gerade, positiv oder 0 sind, während Δ , δ_1 , δ_2 positiv und negativ sein können.

Sind nun zunächst α , γ_1 , γ_2 gegeben, so folgt aus 41), dass Δ noch $2\alpha + 1$ Werthe (nämlich α , $\alpha - 1$, $\dots$, 1 , 0 , -1 , $\dots$, $-\alpha$), δ_1 noch $\gamma_1 + 1$ Werthe (nämlich γ_1 , $\gamma_1 - 2$, $\dots$, $-\gamma_1$) und ebenso δ_2 nur $\gamma_2 + 1$ Werthe annehmen kann. Die Zahl Sg ist demnach:

$$Sg = \Sigma (2\alpha + 1) (\gamma_1 + 1) (\gamma_2 + 1),$$

wo $\alpha, \gamma_1, \gamma_2$ alle positiven Zahlen inclusive 0 zu durchlaufen haben, die der Bedingung 40) genügen.

Ist nun g ungerade, so kann man setzen:

$$g - 2\alpha = 2x + 1 = \gamma_1 + \gamma_2,$$

wo x alle Werthe von 0 bis $\frac{g-1}{2}$. Mithin wird:

$$Sg = \sum_{x=0}^{\frac{g-1}{2}} \sum_{\gamma_1=0}^{\gamma_1=2x+1} (\gamma_1 + 1) (2x + 2 - \gamma_1) (g - 2x).$$

Nach γ_1 kann man sofort summiren und erhält also:

$$Sg = 2 \cdot \sum_{x=1}^{\frac{g-1}{2}} \frac{(x+1)(x+2)(2x+3)}{3} (g-2x).$$

Man könnte die Summation nach x natürlich auch noch vornehmen, doch ist diese Formel zur Berechnung von Sg , wenn g nicht zu gross ist, am besten geeignet.

Ist aber g gerade, so setze man:

$$g - 2\alpha = 2x = \gamma_1 + \gamma_2,$$

so dass x jetzt alle Werthe von 0 bis $\frac{g}{2}$ durchlaufen kann. Es wird also hier:

$$Sg = \sum_{x=0}^{\frac{g}{2}} \sum_{\gamma_1=0}^{\gamma_1=2x} (\gamma_1 + 1) (2x + 1 - \gamma_1) (g - 2x + 1),$$

oder:

$$Sg = \sum_{x=0}^{\frac{g}{2}} \frac{(2x+1)(x+1)(2x+3)}{3} (g-2x+1).$$

Die Anzahl der Glieder 39) vom Grade g ist aber geringer als Sg . Der Formel $\cos x = \cos(-x)$ wegen kann man nämlich je zwei Systeme 38), für welche die drei Zahlen $\Delta, \delta_1, \delta_2$ entgegengesetzt gleiche Werthe haben, in eins vereinigen, wenn in dem einen der zugehörigen Glieder 39) h mit $-h$ vertauscht wird. Die Anzahl sg dieser Glieder findet man also, indem man die Hälfte der Anzahl der Systeme 38), für welche $\Delta, \delta_1, \delta_2$ nicht alle drei zugleich 0 sind, zu der Anzahl derjenigen, für welche sie Null werden, addirt. Bezeichnet man die Anzahl der letzteren mit Tg , so wird also:

$$s_g = \frac{Sg + Tg}{2}.$$

Ist nun g ungerade, so ist $Tg = 0$, weil dann niemals γ_1 und γ_2 zugleich gerade sein können, wie es der Fall sein muss, wenn Δ , δ_1 und $\delta_2 = 0$ sein sollen. Ist g gerade und setzt man dann für den Fall, dass Δ , δ_1 und $\delta_2 = 0$ sind: $\gamma_1 = 2\gamma_1'$, $\gamma_2 = 2\gamma_2'$, so ist dann:

$$\frac{g}{2} = \alpha + \gamma_1' + \gamma_2',$$

und Tg ist also = der Anzahl der Lösungssysteme dieser diophantischen Gleichung in positiven ganzen Zahlen inclusive 0. D. h. es ist:

$$Tg = \frac{\left(\frac{g}{2} + 1\right) \left(\frac{g}{2} + 2\right)}{2}.$$

Somit sehen wir, dass, wenn:

1) g ungerade:

$$s_g = \sum_{x=0}^{x=\frac{g-1}{2}} \frac{(x+1)(x+2)(2x+3)}{3} (g-2x),$$

2) g gerade:

$$s_g = \frac{1}{2} \left(\frac{\left(\frac{g}{2} + 1\right) \left(\frac{g}{2} + 2\right)}{2} \right) + \sum_{x=0}^{x=\frac{g}{2}} \frac{(2x+1)(x+1)(2x+3)}{3} \cdot (g-2x+1).$$

Hieraus ergibt sich ohne Weiteres die Anzahl der Glieder 39) vom Grade:

$$\begin{array}{cccccccc} 0, & 1, & 2, & 3, & 4 & 5, & 6, & 7, & \dots\dots \\ = 1, & 2, & 8, & 16, & 38, & 68, & 128, & 208, & \dots\dots \end{array}$$

Bis zum 4. Grad
65 Glieder

Bis zum siebenten Grad inclusive hat man also 469 Glieder zu berechnen, wie es von LEVERRIER geschehen ist. Vergewärtigt man sich nun, was Alles zu berechnen ist, ehe bei höherem Grade diese Glieder, d. h. die Coefficienten K als Functionen von a_1 , a_2 und der unbestimmten ganzen Zahl h sich ergeben, so erhält man einen ungefähren Begriff von der mühevollen Arbeit, die er allerdings mit Leichtigkeit auf etwa den dritten Theil reducirt. Wie gross die Rechnungen gewesen sind, möge der Leser daraus entnehmen, dass

die blosse Angabe des Resultates 53 Quartseiten beansprucht. Da ich aber glaube, hier den allgemeinen Gang der Rechnungen genügend gekennzeichnet zu haben, so verzichte ich auf die Besprechung weiterer Details, die der Leser am besten aus dem Werke selbst entnimmt. Ich wollte ihn nur aus der Ferne einen flüchtigen Blick auf die ungeheuren Rechnungen werfen lassen, die nothwendig gewesen sind, ehe man so genaue Planetentafeln hat herstellen können, wie man sie jetzt besitzt.

In derselben Weise wie r_{12}^{-1} kann man auch den anderen Theil der Störungfunction, nämlich:

$$\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_2^3} = \frac{r_1}{r_2^2} \left(\cos V \cdot \cos^2 \frac{J}{2} + \cos W \cdot \sin^2 \frac{J}{2} \right)$$

entwickeln, und zwar ist die Entwicklung bedeutend einfacher, als die vorige, da die Zahlen α nur 0 oder 2, und h_1 sowie h_2 nur $= \pm 1$ werden können, während sonst die Form der Glieder dieselbe bleibt.

In der Abhandlung: *Mémoire sur le développement en Séries des coordonnées des planètes et de la fonction perturbatrice* (Journal de Liouville 1860, pag. 65 und 105) hat PUISEUX Formeln aufgestellt, welche den Coefficienten K für jeden Werth der Zahlen α , γ_1 , γ_2 , h_1 , h_2 , δ_1 , δ_2 zu berechnen gestatten. Seine Formeln, die aus den bis in das letzte Detail ausgeführten, hier grösstentheils nur angedeuteten Operationen entstanden sind, stellen somit formell die vollständige Lösung dar, wenn man noch die fünf von ihm eingeführten Grössen c , ε , ε' , ω , ω' nach steigenden Potenzen von z , e_1 und e_2 entwickelt. Dann aber werden sie noch complicirter, als sie es ohnehin schon sind und glaube ich kaum, dass es für einen einigermaassen hohen Grad praktisch möglich wäre, die Berechnung durchzuführen, wie es LEVERRIER bis zum siebenten Grade inclusive gelungen ist. Sie sind vielleicht auch nicht die einfachsten, welche man aufstellen könnte, da sich möglicherweise manche Summationen zusammenziehen lassen würden. Jedenfalls kann man aus den Ausdrücken von PUISEUX, eben weil sie ganz expedit sind, schwerlich die Relationen herleiten, von welchen wir am Schlusse dieses Paragraphen sprechen wollen.

So zweckentsprechend die hier gegebene Form der Entwicklung für praktische Berechnungen sein mag, so treten in ihr doch nicht alle zwölf Elemente

$$a_1, a_2, e_1, e_2, i_1, i_2, \pi_1, \pi_2, \Omega_1, \Omega_2, \zeta_1, \zeta_2$$

in einer übersichtlichen Gestalt auf (der Einfachheit des Ausdruckes wegen wollen wir die mittleren Längen ζ_1 und ζ_2 , trotzdem in ihnen die Zeit t enthalten ist, auch Elemente nennen), vielmehr sind die acht letzten implicite in J, l_1, l_2, M_1, M_2 enthalten und zwar in folgender Weise:

$$\cos J = \cos i_1 \cdot \cos i_2 + \sin i_1 \cdot \sin i_2 \cdot \cos (\Omega_1 - \Omega_2),$$

$$l_1 = \zeta_1 - \Omega_1 + \Pi_1, \quad l_2 = \zeta_2 - \Omega_2 + \Pi_2,$$

$$M_1 = \zeta_1 - \pi_1, \quad M_2 = \zeta_2 - \pi_2,$$

wo Π_1 und Π_2 aus 6) zu bestimmen sind. Will man daher die Neigungen, Perihellängen, Knotenlängen und mittleren Längen explicite in der Störungsfunction zum Ausdruck zu bringen, so hat man jedes Glied der Störungsfunction:

$$42) \quad K z^\alpha e_1^{\gamma_1} e_2^{\gamma_2} \cos (h_1 l_1 + h_2 l_2 + \delta_1 M_1 + \delta_2 M_2), \quad \text{oder:}$$

$$43) \quad K z^\alpha e_1^{\gamma_1} e_2^{\gamma_2} \cos (A + p x + q y),$$

wo der Kürze wegen:

$$44) \quad \begin{cases} A = (h_1 + \delta_1) \zeta_1 + (h_2 + \delta_2) \zeta_2 - \delta_1 \pi_1 - \delta_2 \pi_2, \\ x = -\Pi_1 + \Pi_2 + \Omega_1 - \Omega_2, \quad p = -\frac{h_1 + h_2}{2}, \\ y = -\Pi_1 - \Pi_2 + \Omega_1 + \Omega_2, \quad q = -\frac{h_1 - h_2}{2}, \end{cases}$$

in eine dreifach unendliche Reihe aufzulösen.

Es handelt sich daher noch darum, für die drei Winkel J, Π_1, Π_2 ihre Werthe aus 5) und 6) einzusetzen und das Resultat dieser Substitution angemessen darzustellen, wozu man am elegantesten auf folgende Weise gelangt. Aus 6) folgt nach leichten Rechnungen ($i = \sqrt{-1}, e = 2,71828 \dots$):

$$45) \quad \begin{cases} e^{\pm i x} = (a + b e^{\pm i(\Omega_1 - \Omega_2)})^2, \\ e^{\pm i y} = (a_1 e^{\pm i \Omega_1} + b_1 e^{\pm i \Omega_2})^2, \quad \text{wo:} \\ a = \frac{\cos \frac{i_1}{2} \cdot \cos \frac{i_2}{2}}{\cos \frac{J}{2}}, \quad b = \frac{\sin \frac{i_1}{2} \cdot \sin \frac{i_2}{2}}{\cos \frac{J}{2}}, \\ a_1 = \frac{\sin \frac{i_1}{2} \cdot \cos \frac{i_2}{2}}{\sin \frac{J}{2}}, \quad b_1 = -\frac{\cos \frac{i_1}{2} \cdot \sin \frac{i_2}{2}}{\sin \frac{J}{2}}, \end{cases}$$

daher:

$$e^{\pm p i x} = \sum \frac{[2p]!}{[\lambda]![\mu]!} \cdot a^{[\lambda]} \cdot b^{[\mu]} \cdot e^{\pm \mu(\Omega_1 - \Omega_2)},$$

wo λ und μ alle ganzen Zahlen von demselben Vorzeichen wie p (0 eingeschlossen) durchlaufen müssen, für welche:

$$\lambda + \mu = 2p.$$

Ebenso:

$$e^{\pm q i y} = \sum \frac{[2q]!}{[\lambda_1]![\mu_1]!} \cdot a_1^{[\lambda_1]} \cdot b_1^{[\mu_1]} \cdot e^{\pm (\lambda_1 \Omega_1 + \mu_1 \Omega_2)},$$

wo λ_1 und μ_1 alle ganzen Zahlen durchlaufen müssen, die mit q dem Vorzeichen nach übereinstimmen (inclusive 0), für welche:

$$\lambda_1 + \mu_1 = 2q = -h_1 - h_2.$$

Hieraus folgt endlich:

$$\begin{aligned} 46) \quad & K z^\alpha e_1^{\gamma_1} e_2^{\gamma_2} \cdot \cos(A + px + qy) \\ &= \sum K \cdot \frac{[2p]![2q]!}{[\lambda]![\mu]![\lambda_1]![\mu_1]!} \cdot e_1^{\gamma_1} \cdot e_2^{\gamma_2} \cdot z^\alpha \cdot a^{[\lambda]} \cdot b^{[\mu]} \cdot a^{[\lambda_1]} \cdot b^{[\mu_1]} \\ &\quad \cos[A + \mu(\Omega_1 - \Omega_2) + \lambda_1 \Omega_1 + \mu_1 \Omega_2]. \end{aligned}$$

Setzt man also noch:

$$\begin{aligned} a_1 &= h_1 + \delta_1, & b_1 &= -\delta_1, & c_1 &= \mu + \lambda_1, \\ a_2 &= h_2 + \delta_2, & b_2 &= -\delta_2, & c_2 &= -\mu + \mu_1, \end{aligned}$$

so dass:

$$47) \quad a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 = 0,$$

so geht der Winkel der rechten Seite von 46) über in:

$$48) \quad a_1 \zeta_1 + a_2 \zeta_2 + b_1 \pi_1 + b_2 \pi_2 + c_1 \Omega_1 + c_2 \Omega_2 = L.$$

Betrachten wir nun noch das Product $z^\alpha \cdot a^{[\lambda]} \cdot b^{[\mu]} \cdot a_1^{[\lambda_1]} \cdot b_1^{[\mu_1]}$. Dasselbe geht mit Hilfe der Gleichungen 45) über in:

$$\begin{aligned} & (-1)^{\mu_1} \cdot \frac{z^{\alpha - [q]}}{(1 - z)^{[p]}} \cdot \left(\cos \frac{i_1}{2} \right)^{[\lambda] + [\mu_1]} \cdot \left(\cos \frac{i_2}{2} \right)^{[\lambda] + [\lambda_1]} \\ & \quad \cdot \left(\sin \frac{i_1}{2} \right)^{[\mu] + [\lambda_1]} \cdot \left(\sin \frac{i_2}{2} \right)^{[\mu] + [\mu_1]}. \end{aligned}$$

Das Product der vier letzten Factoren kann nach steigenden Potenzen von i_1 und i_2 entwickelt werden. Der erste Factor $\frac{z^{\alpha - [q]}}{(1 - z)^{[p]}}$ kann, da $\alpha - [q]$ nicht negativ ist, nach positiven und steigenden Potenzen von z entwickelt werden. z selbst und seine Potenzen können aber

sofort nach den $\cos$ der Vielfachen von $\Omega_1 - \Omega_2$ geordnet werden und die Coefficienten werden Functionen von i_1 und i_2 , die ebenfalls mit Leichtigkeit nach steigenden Potenzen dieser Grössen geordnet sind. Setzt man all dies in das obige Product und dieses dann wieder in das Glied 46) ein, so erhält schliesslich die Entwicklung der Störungsfunction die folgende Gestalt:

$$49) \quad r_{12}^{-1} = \Sigma K \cdot e_1^{\gamma_1} \cdot e_2^{\gamma_2} \cdot i_1^{\alpha_1} \cdot i_2^{\alpha_2} \cdot \cos L.$$

Hier hat L die Form 48), in welcher die ganzen Zahlen $\alpha_1 \dots$ der Gleichung 47) genügen, sonst aber alle möglichen positiven und negativen Werthe annehmen dürfen, nur dass $\epsilon_1 + \epsilon_2$ immer gerade sein muss. Die Exponenten $\gamma_1, \gamma_2, \alpha_1, \alpha_2$ sind sämmtlich positiv und genügen sie, wie die gegebenen Entwicklungen sofort erkennen lassen, den Bedingungen, dass die vier Differenzen:

$$\gamma_1 - [\epsilon_1], \quad \gamma_2 - [\epsilon_2], \quad \alpha_1 - [\epsilon_1], \quad \alpha_2 - [\epsilon_2]$$

sämmtlich gerade, positiv oder 0 sind. Die K sind homogene Functionen (-1)^{ter} Ordnung von a_1 und a_2 , in deren allgemeine Ausdrücke noch die obigen ganzen Zahlen eingehen. Der Grad g eines Gliedes wird hier:

$$g = \gamma_1 + \gamma_2 + \alpha_1 + \alpha_2 \geq [\alpha_1 + \alpha_2].$$

Der zweite Theil 2) der Störungsfunction giebt Glieder von derselben Form 49), nur dass hier $[\epsilon_1] + [\epsilon_2]$ blos $= 0$ oder $= 2$ werden kann. Die Berechnung dieses Theiles ist verhältnissmässig einfach und erfordert keine so weitläufigen Operationen, wie die des ersten.

Setzt man noch $\alpha_1 + \alpha_2 = \Delta$, so giebt es nur eine endliche Anzahl von Zahlssystemen:

$$\gamma_1, \gamma_2, \alpha_1, \alpha_2, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_1, \epsilon_2, \Delta,$$

für welche der Grad g eine bestimmte Grenze nicht überschreitet.

Löst man bei der Beschränkung auf diese Grenze die Störungsfunction in einfache Reihen auf, von denen jede aus unzählig vielen, in obigem Zahlensystem übereinstimmenden Gliedern besteht, so ist also die Anzahl dieser Reihen beschränkt. Man kann auch hier ohne Schwierigkeit die Anzahl s_g der Reihen eines gegebenen Grades angeben und findet folgende Formeln:

$$s_{2k} = u_{2k} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} u_{2k-2} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} u_{2k-4} + \dots$$

$$+ \frac{(4+k-1)(4+k-2)(4+k-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot u_0,$$

$$s_{2k+1} = u_{2k+1} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} u_{2k-1} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} u_{2k-3} + \dots$$

$$+ \frac{(4+k-1)(4+k-2)(4+k-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot u_1,$$

wo allgemein:

$$u_k = \frac{2k(k^2 + 2)}{3},$$

mit Ausnahme von $k = 0$, für welchen Fall

$$u_1 = 1$$

zu setzen ist.

Hiernach findet man z. B.:

$$s_0 = 1, \quad s_2 = 12, \quad s_4 = 90, \quad s_6 = 444,$$

$$s_2 = 2, \quad s_3 = 30, \quad s_5 = 222, \quad s_7 = 858.$$

Hätte also LEVERRIER die ganz expedite Form 53) gewählt, so würde er nicht weniger als 1659 Glieder haben berechnen müssen.

Mit der analytischen Entwicklung der Störungsfunction haben sich sehr viel Mathematiker befasst. So hat CAUCHY den Vorschlag gemacht (und denselben auch ausgeführt), in die Störungsfunction zunächst die excentrischen Anomalien E_1 und E_2 einzuführen, und nach den cos der Vielfachen dieser zu entwickeln. Die BESSEL'schen Functionen dienen ihm dann dazu, um auf sehr einfache Weise die mittleren Anomalien an die Stelle der excentrischen zu setzen. Seine zahlreichen Untersuchungen über diesen Gegenstand sind in den Comptes rendus erschienen und jetzt in seinen Oeuvres complètes zusammengefasst worden.

Wenn auch die bisher von den Astronomen angewendeten Entwicklungsmethoden von

$$r_{12}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}$$

directe sind, so ist damit nicht gesagt, dass man nicht auch auf indirectem Wege zu einer analytischen Darstellung von r_{12}^{-1} , welches wir der Kürze wegen mit F bezeichnen wollen, gelangen könnte. Ein solcher besteht z. B. darin, dass man gewisse partielle Differentialgleichungen aufstellt, welchen F als Function der zwölf Elemente der beiden Planeten genügt und welche F bestimmen.

Betrachtet man F zunächst als Function der Coordinaten $x_1, x_2 \dots$ und der Geschwindigkeitscomponenten $u_1, u_2, \dots$, so genügt F den sechs partiellen Differentialgleichungen:

$$50) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u_1} = 0, & \frac{\partial F}{\partial v_1} = 0, & \frac{\partial F}{\partial w_1} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial u_2} = 0, & \frac{\partial F}{\partial v_2} = 0, & \frac{\partial F}{\partial w_2} = 0, \end{cases}$$

welche aussagen, dass F von den Geschwindigkeitscomponenten unabhängig ist. Ausserdem gelten noch folgende sechs partielle Differentialgleichungen:

$$51) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, & \frac{\partial F}{\partial y_1} + \frac{\partial F}{\partial y_2} = 0, & \frac{\partial F}{\partial z_1} + \frac{\partial F}{\partial z_2} = 0, \\ x_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial F}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \\ y_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial F}{\partial z_2} - z_2 \frac{\partial F}{\partial y_2} = 0, \\ z_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial F}{\partial z_2} = 0, \end{cases}$$

von denen die ersten drei aussagen, dass F nur von $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$ abhängt und die letzten drei dann weiter so zu deuten sind, dass F eine Function von r_{12} ist. Die 6 Gleichungen 51) für F sind nicht unabhängig, vielmehr findet zwischen ihnen eine identische Gleichung statt. Endlich genügt F als homogene Function — 1^{ten} Grades der Coordinaten der partiellen Differentialgleichung:

$$52) \quad x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} + z_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + y_2 \frac{\partial F}{\partial y_2} + z_2 \frac{\partial F}{\partial z_2} = -F.$$

Die Gleichungen 50), 51), 52) bestimmen F bis auf einen constanten Factor c und folgt aus ihnen:

$$F = c \cdot r_{12}^{-1}.$$

Denkt man sich jetzt statt der Coordinaten und Geschwindigkeiten die Elemente $a_1, \dots, \zeta_1, a_2, \dots, \zeta_2$ substituirt, so gehen diese partiellen Differentialgleichungen in solche mit $a_1, \dots, \zeta_1, a_2, \dots, \zeta_2$ als Unbekannten über. So z. B. erhält die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = 0 \text{ die Gestalt:}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial a_1}{\partial u_1} + \frac{\partial F}{\partial e_1} \cdot \frac{\partial e_1}{\partial u_1} + \frac{\partial F}{\partial i_1} \cdot \frac{\partial i_1}{\partial u_1} + \frac{\partial F}{\partial \pi_1} \cdot \frac{\partial \pi_1}{\partial u_1} \\ + \frac{\partial F}{\partial \Omega_1} \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} + \frac{\partial F}{\partial \zeta_1} \cdot \frac{\partial \zeta_1}{\partial u_1} = 0 \end{aligned}$$

und hat man hier die Coefficienten $\frac{\partial a_1}{\partial u_1}, \frac{\partial e_1}{\partial u_1}, \dots$ als Functionen der Elemente $a_1, e_1, \dots$ sich zu denken. Nimmt man nun für F die Form 49) an, so müssen die so modificirten partiellen Differentialgleichungen die Coefficienten K bis auf einen einzigen noch übrig bleibenden constanten Factor bestimmen, welcher sich dann mit Leichtigkeit ergibt.

Zwei der partiellen Differentialgleichungen kann man sofort hinschreiben. Die eine ist Gleichung 52), welche hier die Gestalt annimmt:

$$a_1 \frac{\partial F}{\partial a_1} + a_2 \frac{\partial F}{\partial a_2} = -F.$$

aus welcher dann folgt, dass dieser selben Differentialgleichung jeder Coefficient K genügt. Die andere ist eine Verbindung der beiden letzten Gleichungen 51), welche die Form erhält:

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} + \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} + \frac{\partial F}{\partial \pi_1} + \frac{\partial F}{\partial \pi_2} + \frac{\partial F}{\partial \Omega_1} + \frac{\partial F}{\partial \Omega_2} = 0,$$

aus welcher dann für jedes Glied von 48) die Bedingungsgleichung 47) folgt. Etwas complicirter werden die übrigen zehn Gleichungen 50) und 51), welche, nachdem wir wissen, dass die K homogene Functionen — 1^{ten} Grades von a_1 und a_2 sind, dazu dienen, diese homogenen Functionen zu bestimmen und eine unendliche Anzahl von Relationen zwischen ihnen und ihren partiellen Differentialquotienten nach a_1 und a_2 aufzustellen.

Häufig ist die ganz expedite Form 49) nicht nothwendig. Wenn es sich bloß darum handelt, die Störungfunction als analytische Function von t , welches nur in ζ_1 und ζ_2 enthalten ist, darzustellen, so kann man in 49) alle Glieder, für welche a_1 und a_2 dieselben Werthe haben, in eins zusammenziehen und die Störungfunction in der Form darstellen:

$$53) \quad r_{12}^{-1} = \frac{1}{2} \sum \{ A_{a_1, a_2} \cos(a_1 \zeta_1 + a_2 \zeta_2) + B_{a_1, a_2} \sin(a_1 \zeta_1 + a_2 \zeta_2) \},$$

wo a_1 und a_2 alle möglichen positiven und negativen Zahlen bedeuten und angenommen wird, dass:

$$A_{-a_1, -a_2} = A_{a_1, a_2}, \quad B_{-a_1, -a_2} = B_{a_1, a_2}.$$

Die Coefficienten A und B kann man sofort in bestimmten Doppelintegralen ausdrücken, wenn man in derselben Weise verfährt, wie FOURIER bei den trigonometrischen Functionen eines Winkels. Es wird:

$$A_{a_1, a_2} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r_{12}^{-1} \cdot \cos(a_1 \zeta_1 + a_2 \zeta_2) \cdot d\zeta_1 \cdot d\zeta_2,$$

$$B_{a_1, a_2} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r_{12}^{-1} \cdot \sin(a_1 \zeta_1 + a_2 \zeta_2) \cdot d\zeta_1 \cdot d\zeta_2.$$

Man kann bei der numerischen Berechnung dieser Coefficienten zwei Wege einschlagen. Einmal kann man nach LIOUVILLE (Sur le calcul des inégalités périodiques, Jour. de Math. I. 1836) die Doppelintegrale in eine sehr schnell convergirende Reihe von einfachen Integralen, welche dann durch mechanische Quadratur zu bestimmen sind, auflösen. Oder man kann nach LEVERRIER (Recherches astronomiques) ein Interpolationsverfahren anwenden. Endlich hat noch CAUCHY (in den oben erwähnten in den Comptes rendus erschienenen Abhandlungen) für den Fall, dass $[a_1 + a_2]$ eine grössere Zahl ist, ein eigenthümliches Verfahren kennen gelernt und für ein bestimmtes, auf Pallas und Jupiter sich beziehendes Glied praktisch verwerthet.

Schliesslich will ich noch erwähnen, dass HANSEN eine ganz besondere Art der Entwicklung der Störungsfunction gegeben hat, welche darauf beruht, dass für den einen Planeten die mittlere Anomalie eingeführt, für den anderen Planeten, resp. Kometen, von stärkerer, die Convergenz beeinträchtigender oder vernichtender Excentricität, die wahre Anomalie beibehalten wird. Da sich seine Arbeiten aber grösstentheils auf den Mond, die Asteroiden und die Kometen beziehen, oder wenigstens für diese Himmelskörper ihren besonderen Werth erlangen, so muss ich mich hier, wo es sich nur um die Sonne und die Hauptplaneten handelt, mit der blossen Erwähnung begnügen.

§ 25.

Entwicklung von $(a_1^2 - 2a_1 \cdot a_2 \cos \delta + a_2^2)^{-\frac{s}{2}}$ in eine trigonometrische Reihe.

Bei der im vorigen Paragraphen gewählten analytischen Entwicklungsweise des reciproken Werthes der Entfernung zweier Planeten spielen die Entwicklungscoefficienten (s^i) der Function:

$$\begin{aligned} 1) \quad (a_1^2 - 2a_1 \cdot a_2 \cos \delta + a_2^2)^{-\frac{s}{2}} &= \frac{1}{2}(s^0) + (s^1) \cos \delta + (s^2) \cos 2\delta + \dots \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} (s^i) \cos i \delta \end{aligned}$$

eine hervorragende Rolle. Um die zweite Schreibweise der rechten Seite zu rechtfertigen und (s^i) auch für negative Werthe von i zu definiren, ist hier vorausgesetzt, dass:

$$2) \quad (s^i) = (s^{-i}).$$

Den Coefficienten (s^i) kann man mit Hilfe des FOURIER'schen Satzes über trigonometrische Reihen in die Gestalt bringen:

$$3) \quad (s^i) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\cos i \delta \, d\delta}{(\sqrt{a_1^2 - 2a_1 a_2 \cos \delta + a_2^2})^s},$$

und, indem man $\cos \delta = x$ setzt, auf die Berechnung elliptischer Integrale zurückführen. Indessen schlägt man nach LAPLACE besser einen direkten Weg ein. Es ist:

$$a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 \cdot a_2 \cos \delta = (a_1 - a_2 e^{i\delta})(a_1 - a_2 e^{-i\delta}),$$

also, wenn man noch setzt:

$$\frac{a_2}{a_1} = \alpha,$$

$$4) \quad (a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 \cdot a_2 \cos \delta)^{-\frac{s}{2}} = a_1^{-s} (1 - \alpha \cdot e^{i\delta})^{-\frac{s}{2}} \cdot (1 - \alpha \cdot e^{-i\delta})^{-\frac{s}{2}}.$$

Ist $\alpha < 1$ (im entgegengesetzten Falle vertausche man a_2 mit a_1), so ergibt der binomische Lehrsatz:

$$\begin{aligned} & (a_1^2 - 2a_1 \cdot a_2 \cos \delta + a_2^2)^{-\frac{s}{2}} \\ &= a_1^{-s} \left(1 + \frac{s}{2} \cdot \alpha e^{i\delta} + \frac{s \cdot (s+2)}{2^2 \cdot 2!} \cdot \alpha^2 e^{2i\delta} \right. \\ & \quad \left. + \frac{s \cdot (s+2)(s+4)}{2^3 \cdot 3!} \cdot \alpha^3 e^{3i\delta} + \dots \right) \times \\ & \quad \left(1 + \frac{s}{2} \cdot \alpha e^{-i\delta} + \frac{s \cdot (s+2)}{2^2 \cdot 2!} \cdot \alpha^2 e^{-2i\delta} \right. \\ & \quad \left. + \frac{s \cdot (s+2)(s+4)}{2^3 \cdot 3!} \cdot \alpha^3 e^{-3i\delta} + \dots \right). \end{aligned}$$

Multiplicirt man die beiden Reihen aus und ordnet nach Potenzen von α , so werden die Coefficienten ganze Functionen von $x = \cos \delta$, welche in vielen Problemen eine grosse Rolle spielen und den Namen Kugelfunctionen führen. Ordnet man aber nach Potenzen von $e^{i\delta}$, so erhält man die uns hier angehenden Coefficienten (s^i) . Es wird:

$$\begin{aligned}
 5) \quad \frac{1}{2}(s^i) = a_1^{-s} & \left(\frac{s \cdot (s+2) \dots (s+2i-2)}{2^i i!} \cdot \alpha^i \right. \\
 & + \frac{s \cdot (s+2) \dots (s+2i)}{2^{i+1} (i+1)!} \cdot \frac{s}{2} \cdot \alpha^{i+2} \\
 & + \frac{s \cdot (s+2) \dots (s+2i+2)}{2^{i+2} (i+2)!} \cdot \frac{s \cdot (s+2)}{2^2 \cdot 2!} \cdot \alpha^{i+4} \\
 & + \dots \left. \right).
 \end{aligned}$$

Damit ist der allgemeine Ausdruck für (s^i) für jeden Werth von s und i gefunden. (Für ein negatives i ist er illusorisch, dann aber hat man Formel 2) zu benutzen.) Doch ist dies nicht hinreichend, vielmehr müssen wir noch eine Reihe von Fundamentalrelationen zwischen den (s^i) ableiten. Dieselben ergeben sich sehr einfach durch Reduction von (s^i) auf die GAUSS'sche hypergeometrische Reihe:

$$\begin{aligned}
 6) \quad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\beta}{\gamma} \cdot x + \frac{\alpha \cdot (\alpha+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta \cdot (\beta+1)}{\gamma \cdot (\gamma+1)} \cdot x^2 \\
 + \frac{\alpha \cdot (\alpha+1)(\alpha+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\beta \cdot (\beta+1)(\beta+2)}{\gamma \cdot (\gamma+1)(\gamma+2)} \cdot x^3 + \dots
 \end{aligned}$$

Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}
 7) \quad \frac{1}{2}(s^i) = a_1^{-s} \cdot \frac{s \cdot (s+2)(s+4) \dots (s+2i-2)}{2^i \cdot i!} \alpha^i \times \\
 F\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2} + i, i+1, \alpha^2\right).
 \end{aligned}$$

Jedoch giebt die Gleichung 1) mit derselben Leichtigkeit die genannten Relationen. Setzt man der Kürze wegen:

$$a_1^2 - 2a_1 \cdot a_2 \cos \delta + a_2^2 = \varrho,$$

so erhält man durch Differentiation von 1) nach δ :

$$-s \cdot a_1 a_2 \varrho^{-\frac{s+2}{2}} \cdot \sin \delta = -\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} i (s^i) \sin i \delta,$$

oder, wenn man auf beiden Seiten mit 2ϱ multiplicirt:

$$\begin{aligned}
 2s \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \sin \delta \frac{1}{2} \sum (s^i) \cos i \delta \\
 = (a_1^2 + a_2^2) \sum_{-\infty}^{+\infty} i (s^i) \cdot \sin i \delta - 2a_1 \cdot a_2 \cdot \cos \delta \sum_{-\infty}^{+\infty} i (s^i) \sin i \delta.
 \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\sin \delta \sum (s^i) \cos i \delta = \frac{1}{2} \sum (s^i) \sin (i+1) \delta - \frac{1}{2} \sum (s^i) \sin (i-1) \delta,$$

vertauscht man rechts den Summationsindex i mit $i - 1$ resp. $(i + 1)$, so folgt:

$$\sin \delta \Sigma(s^i) \cos i \delta = \frac{1}{2} \Sigma[(s^{i-1}) - (s^{i+1})] \cdot \sin i \delta.$$

Ebenso folgt:

$$\cos \delta \cdot \Sigma i(s^i) \cdot \sin i \delta = \frac{1}{2} \Sigma[(i - 1)(s^{i-1}) + (i + 1)(s^{i+1})] \cdot \sin i \delta.$$

(Die Summationen gehen selbstverständlich immer von $-\infty$ bis $+\infty$)
Daher:

$$\begin{aligned} & s \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \frac{1}{2} \Sigma[(s^{i-1}) - (s^{i+1})] \cdot \sin i \delta \\ &= \Sigma[(a_1^2 + a_2^2) i(s^i) - a_1 \cdot a_2 ((i - 1)(s^{i-1}) + (i + 1)(s^{i+1}))] \cdot \sin i \delta. \end{aligned}$$

Der Coefficient von $\sin i \delta$ links ändert wegen 2) durch Vertauschung von i mit $-i$ sein Vorzeichen. Dasselbe findet rechts statt. Die Coefficienten müssen also gleich sein. Daher:

$$\begin{aligned} 8) \quad & \frac{s}{2} \cdot a_1 \cdot a_2 [(s^{i-1}) - (s^{i+1})] \\ &= (a_1^2 + a_2^2) i(s^i) - a_1 \cdot a_2 [(i - 1)(s^{i-1}) + (i + 1)(s^{i+1})]. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, wenn man noch setzt:

$$9) \quad \frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1 \cdot a_2} = \alpha + \frac{1}{\alpha} = k,$$

$$10) \quad (s^{i+1}) = \frac{2ki(s^i) - (2i + s - 2)(s^{i-1})}{-s + 2i + 2}.$$

Somit haben wir eine Rekursionsformel gewonnen, welche gestattet, die Berechnung aller (s^i) auf die zweier auf einander folgender, z. B. (s^0) und (s^1) zurückzuführen. So folgt z. B.:

$$11) \quad \left\{ \begin{aligned} (s^2) &= \frac{2k(s^1) - s(s^0)}{-s + 4}, \\ (s^3) &= \frac{4k(s^2) - (s + 2)(s^1)}{-s + 6} \\ &= \frac{[8k^2 - (s + 2)(s - 4)](s^1) - 4sk(s^0)}{(-s + 4)(-s + 6)}. \end{aligned} \right.$$

Formel 10) liefert Beziehungen zwischen den Coefficienten einer Reihe 1); jedoch giebt es auch solche zwischen den Coefficienten zweier solcher Reihen, für welche die s um eine gerade Zahl sich unterscheiden. Diese reichen, da in der Astronomie nur der Fall, dass s ungerade ist, eine Rolle spielt, vollständig aus.

Durch Multiplication von 1) mit φ folgt:

$$\begin{aligned} \rho^{-\frac{s-2}{2}} &= \frac{1}{2} \Sigma ((s-2)^i) \cos i \delta = (a_1^2 + a_2^2) \frac{1}{2} \Sigma (s^i) \cos i \delta \\ &\quad - a_1 \cdot a_2 \left[\frac{1}{2} \Sigma (s^i) \cos (i+1) \delta + \frac{1}{2} \Sigma (s^i) \cos (i-1) \delta \right] \\ &= \frac{1}{2} \Sigma \{ (a_1^2 + a_2^2) (s^i) - a_1 \cdot a_2 (s^{i-1}) + (s^{i+1}) \} \cos i \delta. \end{aligned}$$

Da wegen 2) der in die Klammer eingeschlossene Coefficient durch Vertauschung von i mit $-i$ unverändert bleibt, so muss sein:

$$12) \quad ((s-2)^i) = a_1 \cdot a_2 [k(s^i) - (s^{i-1}) - (s^{i+1})],$$

oder nach 10):

$$13) \quad ((s-2)^i) = (-s+2) \cdot a_1 \cdot a_2 \frac{k(s^i) - 2(s^{i-1})}{-s+2i+2},$$

um aber umgekehrt die (s^i) durch die $((s-2)^i)$ auszudrücken, vertausche man in 12) i mit $-(i-1)$ und wende 2) an. Es wird:

$$14) \quad ((s-2)^{i-1}) = (-s+2) a_1 \cdot a_2 \cdot \frac{k(s^{i-1}) - 2(s^i)}{-s-2i+4}.$$

Aus 13) und 14) folgt:

$$\begin{aligned} 15) \quad (s^i) - (s^{i-1}) &= \frac{(-s+2i+2) \cdot ((s-2)^i)}{(-s+2) a_1 \cdot a_2 (k+2)} \\ &\quad + \frac{(s+2i-4)}{(-s+2) a_1 \cdot a_2} \cdot \frac{((s-2)^{i-1})}{(k+2)}. \end{aligned}$$

Hieraus lässt sich ein wichtiger Schluss ziehen. Ist s positiv, so ist (s^i) nach 5) für jeden Werth von i positiv. Ist $s > 2$, so sind also auch $((s-2)^i)$ und $((s-2)^{i-1})$ positiv. Wählt man daher i positiv und so gross, dass sowohl $-s+2i+2$, als auch $s+2i-4$ positiv ist, so wird die rechte Seite von 15) negativ, und darum:

$$(s^i) < (s^{i-1}).$$

Setzt man z. B. $s = 3$, $i = 2$, so folgt:

$$(3^2) - (3^1) = - \frac{3[(1^2) + (1^1)]}{a_1 \cdot a_2 \cdot (k+2)},$$

daher:

$$16) \quad (3^2) < (3^1).$$

Von dieser Ungleichung wird im folgenden Paragraphen eine wichtige Anwendung gemacht werden.

Löst man 13) und 14) nach (s^i) und (s^{i-1}) auf, so ergibt sich:

$$17) \quad \begin{cases} (s^i) = \frac{k(-s+2i+2)((s-2)^i) + 2(-s-2i+4)((s-2)^{i-1})}{(-s+2) \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot (k^2-4)}, \\ (s^{i-1}) = \frac{2(-s+2i+2)((s-2)^i) + k(-s-2i+4)((s-2)^{i-1})}{(-s+2) \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot (k^2-4)}. \end{cases}$$

Schliesslich wollen wir noch die Differentialquotienten von (s^i) nach a_1 und a_2 durch die (s^i) selbst ausdrücken lernen. Differentiirt man 1) nach a_1 , so folgt:

$$-s \cdot \rho^{-\frac{s+2}{2}} \cdot (a_1 - a_2 \cos \delta) = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial(s^i)}{\partial a_1} \cos i \delta,$$

oder:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum \left\{ -s \left(a_1 ((s+2)^i) - a_2 \frac{((s+2)^{i-1}) + ((s+2)^{i+1})}{2} \right) \right\} \cos i \delta \\ &= \frac{1}{2} \sum \frac{\partial(s^i)}{\partial a_1} \cos i \delta, \end{aligned}$$

und also:

$$\frac{\partial(s^i)}{\partial a_1} = -s \cdot a_1 ((s+2)^i) + s \cdot a_2 \frac{((s+2)^{i-1}) + ((s+2)^{i+1})}{2},$$

mithin nach 12), wenn man dort $s+2$ statt s schreibt:

$$18) \quad \frac{\partial(s^i)}{\partial a_1} = -\frac{s}{2a_1} \{ (a_1^2 - a_2^2) \cdot ((s+2)^i) + (s^i) \},$$

und schliesslich nach 17):

$$19) \quad \frac{\partial(s^i)}{\partial a_1} = \frac{[-s \cdot a_1^2 + i(a_1^2 + a_2^2)](s^i) + a_1 \cdot a_2 (-s - 2i + 2)(s^{i-1})}{a_1 \cdot (a_1^2 - a_2^2)}.$$

Durch Vertauschung der beiden Indices 1 und 2) erhält man hieraus $\frac{\partial(s^i)}{\partial a_2}$, doch kann man auch die Differentialquotienten nach a_2 auf diejenigen nach a_1 zurückführen, da (s^i) eine homogene Function $(-s)^{\text{ten}}$ Grades von a_1 und a_2 ist und daher der partiellen Differentialgleichung genügt:

$$20) \quad a_1 \frac{\partial(s^i)}{\partial a_1} + a_2 \frac{\partial(s^i)}{\partial a_2} = -s \cdot (s^i).$$

§ 26.

Die Glieder 0^{ten}, 1^{ten} und 2^{ten} Grades der Störungsfunction.

Die analytische Entwicklung der Coefficienten der Störungsfunction erfordert tage-, wochen-, ja monatelange Rechnungen, wenn man über den zweiten Grad hinausgeht. Beschränkt man sich aber auf die Glieder nullten, ersten und zweiten Grades, so überschreiten die nothwendigen Rechnungen nicht eine angemessene Grenze, so dass der Leser die Formeln noch leicht auf ihre Richtigkeit prüfen kann.

Die Formel 15) des § 24 wird dann:

$$\begin{aligned} 1) \quad r_{12}^{-1} &= \varrho^{-\frac{1}{2}} - r_1 \cdot r_2 (\cos V - \cos W) z \cdot \varrho^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \Sigma(1^\lambda) \cos \lambda V - \frac{1}{2} r_1 \cdot r_2 z \cdot \Sigma(3^\lambda) \cos (\lambda + 1) V \\ &\quad + \frac{1}{2} r_1 \cdot r_2 z \cdot \Sigma(3^\lambda) \cos (\lambda V + W). \end{aligned}$$

Die Grössen p und q werden hier:

$$p = -e \cos M + \frac{e^2}{2} (1 - \cos 2M).$$

$$q = 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M.$$

Die (s^λ) sind hier Functionen von r_1 und r_2 und mögen als solche mit $(s^\lambda)_{r_1, r_2}$ bezeichnet werden. Dagegen soll (s^λ) jetzt einfach $(s^\lambda)_{a_1, a_2}$ sein. Die Formel 1), in welcher man die p und q nur in das erste Glied der rechten Seite einzusetzen braucht, wird hier:

$$\begin{aligned} r_{12}^{-1} &= \frac{1}{2} \Sigma(1^\lambda)_{a_1(1+p_1), a_2(1+p_2)} \cos [\lambda (l_1 - l_2) + \lambda (q_1 - q_2)] \\ &\quad - \frac{1}{2} a_1 \cdot a_2 \cdot z \cdot \Sigma(3^\lambda) \cdot \cos [(\lambda + 1) (l_1 - l_2)] \\ &\quad + \frac{1}{2} a_1 \cdot a_2 \cdot z \cdot \Sigma(3^\lambda) \cos [(\lambda + 1) l_1 - (\lambda - 1) l_2]. \end{aligned}$$

Entwickelt man nun nach steigenden Potenzen von p_1, p_2, q_1, q_2 und setzt dann für diese ihre obigen Werthe ein, so folgt, wenn man zur Abkürzung noch setzt:

$$2) \quad \lambda (l_1 - l_2) = \varphi,$$

$$\begin{aligned} r_{12}^{-1} &= \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} [A_\lambda \cdot \cos \varphi + e_1 B_\lambda \cdot \cos (\varphi + M_1) + e_2 C_\lambda \cdot \cos (\varphi + M_2) \\ &\quad + e_1^2 D_\lambda \cdot \cos \varphi + e_2^2 E_\lambda \cdot \cos \varphi + e_1 \cdot e_2 F_\lambda \cdot \cos (\varphi + M_1 - M_2) \\ &\quad + z \cdot G_\lambda \cdot \cos \varphi + e_1^2 H_\lambda \cdot \cos (\varphi + 2M_1) + e_2^2 J_\lambda \cdot \cos (\varphi + 2M_2) \\ &\quad + e_1 \cdot e_2 K_\lambda \cdot \cos (\varphi + M_1 + M_2) + z \cdot L_\lambda \cdot \cos (\varphi + l_1 + l_2)]. \end{aligned}$$

Die Coefficienten sind:

$$3) \quad \left\{ \begin{aligned} A_\lambda &= \frac{1}{2} I_\lambda, \quad B_\lambda = \frac{1}{2} (-I'_\lambda + 2\lambda I_\lambda), \quad C_\lambda = \frac{1}{2} (-I'_\lambda - 2\lambda I_\lambda), \\ D_\lambda &= \frac{1}{8} [-4\lambda^2 I_\lambda + 2I'_\lambda + I''_\lambda], \quad E_\lambda = \frac{1}{8} [-4\lambda^2 I_\lambda + 2'I_\lambda + ''I_\lambda], \\ F_\lambda &= \frac{1}{4} [4\lambda^2 I_\lambda - 2\lambda(I'_\lambda + 'I_\lambda) + 'I'_\lambda], \quad G_\lambda = -\frac{1}{4} (III_{\lambda-1} + III_{\lambda+1}), \\ H_\lambda &= \frac{1}{8} [(4\lambda^2 + 5\lambda) I_\lambda - (4\lambda + 2) I'_\lambda + I''_\lambda], \\ J_\lambda &= \frac{1}{8} [(4\lambda^2 - 5\lambda) I_\lambda - (-4\lambda + 2)'I_\lambda + ''I_\lambda], \\ K_\lambda &= \frac{1}{4} [-4\lambda^2 I_\lambda + 2\lambda(I'_\lambda - 'I_\lambda) + 'I'_\lambda], \\ L_\lambda &= \frac{1}{2} III_\lambda, \end{aligned} \right.$$

wo der Kürze wegen die Bezeichnungen eingeführt worden:

$$4) \quad I_\lambda = (1^\lambda), \quad I'_\lambda = a_1 \frac{\partial(1^\lambda)}{\partial a_1}, \quad 'I_\lambda = a_2 \frac{\partial(1^\lambda)}{\partial a_2}, \quad I''_\lambda = a_1^2 \frac{\partial^2(1^\lambda)}{\partial a_1^2},$$

$$'I'_\lambda = a_1 a_2 \frac{\partial^2(1^\lambda)}{\partial a_1 \partial a_2}, \quad ''I_\lambda = a_2^2 \frac{\partial^2(1^\lambda)}{\partial a_2^2}, \quad III_\lambda = a_1 \cdot a_2 \cdot (3^\lambda).$$

Zwischen diesen Symbolen finden nach Gleichung 20), § 25, und der aus dieser durch Differentiation nach a_1 und a_2 abgeleiteten die Gleichungen statt:

$$I'_\lambda + 'I_\lambda = -I_\lambda, \quad I''_\lambda + 'I'_\lambda = -2I'_\lambda, \quad 'I'_\lambda + ''I_\lambda = -2'I_\lambda,$$

mit deren Hilfe man die Coefficienten 3) noch umgestalten kann. So findet man z. B.:

$$D_\lambda = E_\lambda = -\frac{1}{8}(4\lambda^2 I_\lambda + 'I'_\lambda), \quad F_\lambda = \frac{1}{4}[(4\lambda^2 + 2\lambda)I_\lambda + 'I'_\lambda].$$

Ferner folgt aus 12), § 25:

$$III_{\lambda-1} + III_{\lambda+1} = k III_\lambda - I_\lambda,$$

und also:

$$G_\lambda = -\frac{1}{4}(k III_\lambda - I_\lambda).$$

Wollen wir die ganz expedite Entwicklung der Störungfunction ableiten, so müssen wir nach § 24 Seite 189 verfahren. Der Winkel x ist klein von der zweiten Ordnung und kann man ihn daher in allen Gliedern, ausser dem ersten, vernachlässigen. Hier hat man zu setzen $\cos x = 1$, $\sin x = \frac{1}{2}i_1 \cdot i_2 \cdot \sin(\Omega_1 - \Omega_2)$, so dass man erhält:

$$\Sigma A_\lambda \cdot \cos \varphi = \Sigma A_\lambda \cdot \cos \psi + \frac{i_1 \cdot i_2}{2} \cdot \Sigma \lambda A_\lambda \cdot \cos(\psi + \Omega_1 - \Omega_2),$$

wo der Kürze wegen gesetzt worden:

$$5) \quad \lambda(\zeta_1 - \zeta_2) = \psi.$$

Ferner löst sich das Glied $z \cdot G_\lambda \cdot \cos \varphi$ in die drei Glieder auf:

$$\frac{i_1^2}{4} \cdot G_\lambda \cdot \cos \psi + \frac{i_2^2}{4} \cdot G_\lambda \cdot \cos \psi - \frac{i_1 \cdot i_2}{2} \cdot G_\lambda \cdot \cos[\psi + (\Omega_1 - \Omega_2)],$$

während das letzte Glied $z L_\lambda \cdot \cos(\varphi + l_1 + l_2)$ sich zerspaltet in:

$$\frac{i_1^2}{4} \cdot L_\lambda \cdot \cos(\psi + \zeta_1 + \zeta_2 - 2\Omega_1) + \frac{i_2^2}{4} \cdot L_\lambda \cdot \cos(\psi + \zeta_1 + \zeta_2 - 2\Omega_2)$$

$$- \frac{i_1 \cdot i_2}{2} \cdot L_\lambda \cos(\psi + \zeta_1 + \zeta_2 - \Omega_1 - \Omega_2).$$

Die Formel 2) verwandelt sich demnach in:

$$\begin{aligned}
6) \quad r_{12}^{-1} = & \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} [A_{\lambda} \cdot \cos \psi + e_1 B_{\lambda} \cdot \cos (\psi + \zeta_1 - \pi_1) \\
& + e_2 C_{\lambda} \cdot \cos (\psi + \zeta_2 - \pi_2) + e_1^2 D_{\lambda} \cdot \cos \psi + e_2^2 E_{\lambda} \cdot \cos \psi \\
& + e_1 \cdot e_2 F_{\lambda} \cdot \cos (\psi + \zeta_1 - \zeta_2 - \pi_1 + \pi_2) + \frac{i_1^2}{4} \cdot G_{\lambda} \cdot \cos \psi \\
& + \frac{i_2^2}{4} \cdot G_{\lambda} \cdot \cos \psi + i_1 \cdot i_2 \cdot G_{\lambda}' \cdot \cos (\psi + \Omega_1 - \Omega_2) \\
& + e_1^2 H_{\lambda} \cdot \cos (\psi + 2\zeta_1 - 2\pi_1) + e_2^2 J_{\lambda} \cdot \cos (\psi + 2\zeta_2 - 2\pi_2) \\
& + e_1 \cdot e_2 K_{\lambda} \cdot \cos (\psi + \zeta_1 - \pi_1 + \zeta_2 - \pi_2) \\
& + \frac{i_1^2}{4} \cdot L_{\lambda} \cdot \cos (\psi + \zeta_1 + \zeta_2 - 2\Omega_1) \\
& + \frac{i_2^2}{4} \cdot L_{\lambda} \cdot \cos (\psi + \zeta_1 + \zeta_2 - 2\Omega_2) \\
& - \frac{i_1 \cdot i_2}{2} \cdot L_{\lambda} \cdot \cos (\psi + \zeta_1 + \zeta_2 - \Omega_1 - \Omega_2)].
\end{aligned}$$

Die Coefficienten A_{λ} bis L_{λ} sind die in 3) angegebenen. Dagegen ist:

$$G_{\lambda}' = -\frac{G_{\lambda}}{2} + \frac{\lambda \cdot A_{\lambda}}{2} = \frac{1}{8}(III_{\lambda-1} + III_{\lambda+1} + 2\lambda I_{\lambda}).$$

Vermittelst 8) und 12) des vorigen Paragraphen wird endlich:

$$7) \quad G_{\lambda}' = \frac{1}{4} III_{\lambda-1}.$$

Damit ist die Störungsfunction bis zum zweiten Grade der Excentricitäten und Neigungen genau vollständig entwickelt.

Wir werden im nächsten Paragraphen erkennen, dass diejenigen Glieder von r_{12}^{-1} , welche von ζ_1 und ζ_2 , also von der Zeit unabhängig sind, eine besonders wichtige Rolle spielen. Wir wollen sie in ein Glied, das sogenannte säculare Glied der Störungsfunction zusammenziehen. Bezeichnen wir es mit $\left[\frac{1}{r_{12}}\right]$, so wird:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{r_{12}}\right] = & \frac{1}{2} I_0 - \frac{e_1^2}{8} 'I_0' - \frac{e_2^2}{8} 'I_0' + \frac{e_1 \cdot e_2}{4} (2I_1 + 'I_1') \cos(\pi_1 - \pi_2) \\
& - \left(\frac{i_1^2}{8} + \frac{i_2^2}{8} - \frac{i_1 \cdot i_2}{4} \cos(\Omega_1 - \Omega_2) \right) III_1.
\end{aligned}$$

Die Coefficienten kann man zum Theil umformen.

Zunächst giebt Formel 19), § 25, wenn man $i = 0$, $s = 1$, dann $i = 1$, $s = 1$ setzt:

$$8) \quad \begin{cases} I_0' = \frac{-a_1^2 I_0 + a_1 \cdot a_2 I_1}{a_1^2 - a_2^2}, \\ I_1' = \frac{-a_1 \cdot a_2 I_0 + a_2^2 I_1}{a_1^2 - a_2^2}, \end{cases}$$

also:

$$9) \quad I_0' a_2 - I_1' a_1 = 0,$$

und ebenso:

$$- 'I_0 a_1 + 'I_1 a_2 = 0,$$

und hieraus folgt, wenn man 8) nach a_2 differentiirt und dann mit a_2 multiplicirt:

$$10) \quad 'I_0' = \frac{a_1 \cdot a_2 I_1}{a_1^2 - a_2^2} + \frac{I_0' \cdot 2a_2^2}{a_1^2 - a_2^2} = \frac{a_2^2 I_0' - a_1^2 'I_0}{a_1^2 - a_2^2}.$$

Ebenso folgt:

$$'I_1' = \frac{a_1 \cdot a_2 (I_0' - 'I_0)}{a_1^2 - a_2^2}.$$

Andererseits folgt aus 16), § 25, wenn man $s = 1$, $i = 1$ resp. 0 annimmt:

$$11) \quad 2 I_1' = - \frac{(a_1^2 - a_2^2)}{a_1 \cdot a_2} III_1 - I_1, \quad 2 I_0' = - \frac{(a_1^2 - a_2^2)}{a_1 \cdot a_2} III_0 - I_0,$$

und mit Anwendung von 8) und 9):

$$12) \quad 'I_0' = - III_1, \quad 'I_1' = - III_0.$$

Daher nach 8), 10), und 12):

$$2 I_1 + 'I_1' = - 2k \cdot III_1 + 3 III_0,$$

und nach 10), § 25:

$$13) \quad 2 I_1 + 'I_1' = - III_2.$$

Somit erhalten wir endlich:

$$14) \quad \left[\frac{1}{r_{12}} \right] = \frac{1}{2} I_0 + \frac{1}{8} III_1 [e_1^2 + e_2^2 - i_1^2 - i_2^2 + 2 i_1 \cdot i_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2)] \\ - \frac{1}{4} III_2 e_1 \cdot e_2 \cos(\pi_1 - \pi_2).$$

Das Glied $\frac{1}{2} I_0$ ist von den Excentricitäten und Neigungen ganz unabhängig. Die übrigen sechs Glieder theilen sich in zwei Gruppen zu je dreien, von denen die erste nur von den Excentricitäten und Perihellängen, die zweite Gruppe nur von den Neigungen und Knotenlängen abhängt. Die Summe der Glieder der zweiten Gruppe ist negativ, da III_1 positiv ist. Das entgegengesetzte findet für den von den Perihelien und Excentricitäten herrührenden Theil statt, da nach 6), § 25, die Ungleichung gilt: $III_2 < III_1$.

Uebrigens ist $\left[\frac{1}{r_{12}}\right]$, wie sofort aus den Betrachtungen des § 24 folgt, von geradem Grade in Bezug auf die Excentricitäten und Neigungen, so dass 14) bis zum dritten Grade inclusive genau ist.

Nun wollen wir noch den anderen Theil der Störungsfunction entwickeln. Die Formeln 19), § 4, ergeben sofort:

$$\begin{aligned}
 15) \quad x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = & a_1 \cdot a_2 [\cos(\zeta_1 - \zeta_2) \\
 & + \frac{e_1}{2} (-3 \cos(\zeta_2 - \pi_1) + \cos(2\zeta_1 - \zeta_2 - \pi_1)) \\
 & + \frac{e_2}{2} (-3 \cos(\zeta_1 - \pi_2) + \cos(2\zeta_2 - \zeta_1 - \pi_2)) \\
 & + \frac{e_1^2}{8} (3 \cos(3\zeta_1 - \zeta_2 - 2\pi_1) - 4 \cos(\zeta_1 - \zeta_2) \\
 & \quad + \cos(2\pi_1 - \zeta_1 - \zeta_2)) \\
 & + \frac{e_2^2}{8} (3 \cos(3\zeta_2 - \zeta_1 - 2\pi_2) - 4 \cos(\zeta_2 - \zeta_1) \\
 & \quad + \cos(2\pi_2 - \zeta_2 - \zeta_1)) \\
 & + \frac{e_1 \cdot e_2}{4} (9 \cos(\pi_1 - \pi_2) - 3 \cos(2\zeta_1 - \pi_1 - \pi_2) \\
 & \quad - 3 \cos(2\zeta_1 - \pi_1 - \pi_2) + \cos(2\zeta_1 - 2\zeta_2 - \pi_1 + \pi_2)) \\
 & + \frac{i_1^2}{4} (\cos(2\Omega_1 - \zeta_1 - \zeta_2) - \cos(\zeta_1 - \zeta_2)) \\
 & + \frac{i_2^2}{4} (\cos(2\Omega_2 - \zeta_1 - \zeta_2) - \cos(\zeta_2 - \zeta_1)) \\
 & + \frac{i_1 \cdot i_2}{2} (\cos(\zeta_1 - \zeta_2 - \Omega_1 - \Omega_2) \\
 & \quad - \cos(\zeta_1 + \zeta_2 - \Omega_1 - \Omega_2))].
 \end{aligned}$$

Hieraus kann man ohne Weiteres $\frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{r_2^3}$ ableiten. Denn es ist:

$$\frac{x_2}{r_2^3} = - \frac{d^2 x_2}{\mu_2 dt^2} = - \frac{n_2^2}{\mu_2} \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial \zeta_2^2}$$

u. s. w. und daher:

$$16) \quad \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_2^3} = - \frac{n_2^2}{\mu_2} \cdot \frac{\partial^2 (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)}{\partial \zeta_2^2}.$$

In 16) kann daher kein von ζ_2 unabhängiges, also auch kein säculares Glied auftreten. Denn wenn ein solches auch in 15) enthalten ist, so verschwindet es durch die Differentiation.

§ 27.

Die analytischen Ausdrücke der Störungen.

In den vorigen Paragraphen haben wir R als Function der Elemente $a, e, \Omega, i, \pi, \zeta$ entwickelt. ζ ist kein eigentliches Element, sondern enthält die Zeit t , da $\zeta = nt + \varepsilon$. Will man in die Formeln 15), § 22, statt des Elementes ε das Element ζ einführen, so bleiben die Differentialquotienten nach e, Ω, i, π in unveränderter Form bestehen. Ferner wird:

$$1) \quad \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial R}{\partial \zeta}.$$

Dagegen erhält $\frac{\partial R}{\partial a}$ eine andere Bedeutung. Bezeichnet man seinen alten Werth durch $\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)$, seinen neuen mit $\frac{\partial R}{\partial a}$, so folgt sofort:

$$2) \quad \left(\frac{\partial R}{\partial a}\right) = \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial a} = \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{3}{2} \frac{n}{a} \cdot t \cdot \frac{\partial R}{\partial \zeta}.$$

Ebenso ergibt sich natürlich:

$$3) \quad \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial x}{\partial \zeta}, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right) = \frac{\partial x}{\partial a} - \frac{3}{2} \frac{n}{a} \cdot t \cdot \frac{\partial x}{\partial \zeta} \text{ u. s. w.}$$

Setzt man dies in 15), § 22, ein, so sieht man mit Hilfe der Tabelle 19), § 11, dass nur in F ein Zusatzglied entsteht, nämlich:

$$+ \frac{3}{a^2} \cdot \int^t t \frac{\partial R}{\partial \zeta} \cdot dt.$$

Ferner entsteht in 4), § 22, bei dem Glied

$$A \frac{\partial x}{\partial a} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{\partial x}{\partial a} \cdot \int^t \frac{\partial R}{\partial \zeta} dt$$

das Zusatzglied:

$$- \frac{3}{a^2} \cdot t \cdot \frac{\partial x}{\partial \zeta} \cdot \int \frac{\partial R}{\partial \zeta} dt.$$

Mithin entsteht in δx das Zusatzglied:

$$\begin{aligned} & + \frac{3}{a^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial \zeta} \cdot \left(\int^t t \frac{\partial R}{\partial \zeta} \cdot dt - t \int \frac{\partial R}{\partial \zeta} \cdot dt \right) \\ & = - \frac{3}{a^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial \zeta} \cdot \int \left(\int \frac{\partial R}{\partial \zeta} \cdot dt \right) dt. \end{aligned}$$

Entsprechende Zusatzglieder ergeben sich für δy und δz . Wie man sieht, kommt das Ganze darauf hinaus, dass in 15), § 22, statt $\frac{\partial R}{\partial a}$ zu schreiben ist:

$$\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{3}{2} \frac{n}{a} \cdot \int \frac{\partial R}{\partial \zeta} \cdot dt.$$

Bezeichnen wir wieder den gestörten Planeten durch den Index 1) und einen der störenden mit dem Index 2), so wird der Theil von R , welcher von diesen beiden Planeten abhängt, in Glieder von der Form entwickelt:

$$4) \quad K \cdot \cos L,$$

wo der Coefficient K nur von den grossen Achsen, den Excentricitäten und Neigungen abhängt und L eine lineare Verbindung der mittleren Längen, der Perihellängen und der Knotenlängen mit ganzen Coefficienten, deren Summe $= 0$ ist, bedeutet. Durch Differentiation von 4) nach einem der Elemente $a_1, e_1, \Omega_1, i_1, \pi_1, \zeta_1$ entsteht wieder ein Glied von der Form:

$$5) \quad K_1 \cdot \frac{\cos}{\sin} (L).$$

Der Winkel L ist eine lineare Function der Zeit und zwar ist der Coefficient von t nach 48), § 25:

$$6) \quad = a_1 n_1 + a_2 n_2.$$

Durch Integration von 5) nach t erhält man also, wenn 6) nicht $= 0$ ist, ein Glied von der Form:

$$7) \quad \frac{K_1}{a_1 n_1 + a_2 n_2} \cdot \left(\frac{+ \sin}{- \cos} (L) \right).$$

Der Coefficient 6) wird $= 0$,

$$8) \quad 1) \text{ wenn } a_1 = a_2 = 0,$$

d. h. für alle säculären Glieder. Dann folgt aus 5) durch Integration nach t ein Glied von der Form:

$$9) \quad \left(K_1 \cdot \frac{\cos}{\sin} (L) \right) \cdot t,$$

also ein der Zeit t proportionales Glied.

$$10) \quad 2) \text{ wenn } n_1 : n_2 = a_2 : -a_1,$$

d. h. wenn die beiden mittleren täglichen Bewegungen, also auch die beiden Umlaufszeiten, in einem commensurablen Verhältniss zu einander stehen. Nun haben wir gesehen, dass in der Wahl der

ursprünglichen Elemente eine grosse Willkür liegt und können wir daher die Umlaufszeiten so wählen, dass die Gleichung 10) niemals, oder doch erst für so grosse ganze Zahlen α_1 und α_2 (annähernd oder ganz) erfüllt ist, dass der Grad des Gliedes sehr gross und also der Coefficient K_1 sehr klein ist, so dass dieses Glied für ausserordentlich lange Zeitintervalle vernachlässigt werden kann. Wir werden später sehen, dass es eine gewisse, sehr zweckmässige Wahl der Elemente giebt und wenn wir diese treffen, so werden in der That die Umlaufszeiten der Planeten nur für sehr grosse Zahlen α_1 und α_2 commensurabel. Somit sehen wir, dass praktisch nur die säcularen Glieder der Störungsfunction durch Integration der Zeit t proportionale Glieder ergeben.

Wir wollen demnach die Störungsfunction R in den sogenannten periodischen Theil und den säcularen Theil sondern und diese mit (R) beziehungsweise $[R]$ bezeichnen.

Wir haben in § 25 gezeigt, dass R_1 in eine Summe von der Form 42) entwickelt werden kann. (R_1) ist dann die Summe der Glieder von R_1 , für welche die beiden ganzen Zahlen α_1 und α_2 nicht alle beide zugleich gleich 0 sind, während $[R_1]$ die Summe derjenigen Glieder bedeutet, für welche α_1 und α_2 zugleich 0 sind.

Es sei:

$$11) K e_1^{\alpha_1} \cdot e_2^{\alpha_2} \cdot i_1^{\beta_1} \cdot i_2^{\beta_2} \cdot \cos(\alpha_1 \zeta_1 + \alpha_2 \zeta_2 + \mathfrak{b}_1 \pi_1 + \mathfrak{b}_2 \pi_2 + \mathfrak{c}_1 \Omega_1 + \mathfrak{c}_2 \Omega_2),$$

oder kurz:

$$12) H \cdot \cos L$$

ein Glied von (R_1) , wobei für die ganzen Zahlen die in § 25 angegebenen Bedingungen gelten, nämlich:

$$13) \alpha_1 + \alpha_2 + \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_2 = 0,$$

und die vier Differenzen:

$$\alpha_1 - [\mathfrak{b}_1], \quad \alpha_2 - [\mathfrak{b}_2], \quad \beta_1 - [\mathfrak{c}_1], \quad \beta_2 - [\mathfrak{c}_2]$$

sind gerade, positiv oder 0.

Ferner sei:

$$14) k \cdot e_1^{\alpha_1'} \cdot i_1^{\beta_1'} \cdot \cos(\alpha_1' \zeta_1 + \mathfrak{b}_1' \pi_1 + \mathfrak{c}_1' \Omega_1) \text{ oder kurz } H' \cos L'$$

ein Glied von x , so dass also nach § 4:

$$\alpha_1' + \mathfrak{b}_1' + \mathfrak{c}_1' = 1$$

und

$$\alpha_1' - [\mathfrak{b}_1'], \quad \beta_1' - [\mathfrak{c}_1']$$

gerade, positiv oder 0.

Bezeichnen wir nun den Theil von δx , welcher von (R_1) herührt, mit (δx_1) , so folgt also, wenn man die Formeln 15) und 11), § 22, und die Tabelle 22), § 11, benutzt:

$$15) \quad (\delta x_1) = \Sigma [M_1 \cos(L' + L) + M_2 \cos(L' - L)],$$

wo:

$$15a) \quad M_1 = \frac{1}{\sqrt{a_1 \mu_1}} \left[-\frac{3}{2} n_1 \cdot H \cdot H' \cdot \frac{a_1 \cdot a_1'}{(a_1 n_1 + a_2 n_2)^2} \right. \\ - \frac{\partial H}{\partial a_1} H' \cdot a_1 \cdot \frac{a_1'}{a_1 n_1 + a_2 n_2} \\ + \frac{H \cdot H'}{a_1 n_1 + a_2 n_2} \left\{ -a_1 + \frac{\sqrt{1-e_1^2}}{2e_1^2} \cdot (-\alpha_1' b_1 + \alpha_1 b_1') \right. \\ + \frac{(1 - \sqrt{1-e_1^2}) \sqrt{1-e_1^2}}{2e_1^2} \cdot (-\alpha_1' a_1 + \alpha_1 a_1') \\ + \frac{1}{2i_1 \sin i_1 \sqrt{1-e_1^2}} \cdot (-\beta_1' c_1 + \beta_1 c_1') \\ \left. \left. + \frac{1 - \cos i_1}{2i_1 \sin i_1 \sqrt{1-e_1^2}} \cdot (-\beta_1'(a_1 + b_1) + \beta_1(a_1' + b_1')) \right\} \right].$$

Das zweite Glied $M_2 \cos(L' - L)$ entsteht aus dem ersten durch einfache Vertauschung der sechs in L eingehenden ganzen Zahlen mit ihren entgegengesetzten Werthen. Das Summenzeichen Σ bezieht sich in 15) nicht allein auf alle in 11) und 14) eingehenden ganzen Zahlen, sondern auch auf alle störenden Planeten. Entwickelt man 15a) nach steigenden Potenzen der Excentricitäten und Neigungen, so folgt sofort folgendes Bildungsgesetz für (δx_1) :

$$16) \quad (\delta x_1) = \Sigma (K) e_1^{\alpha_1} \cdot e_2^{\alpha_2} \cdot i_1^{\beta_1} \cdot i_2^{\beta_2} \cdot \cos(a_1 \zeta_1 + a_2 \zeta_2 + b_1 \pi_1 + b_2 \pi_2 \\ + c_1 \Omega_1 + c_2 \Omega_2),$$

wo für die ganzen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ genau dieselben Bedingungen gelten wie früher, nur dass die Summe 13) nicht $= 0$ sondern $= 1$ wird. (δy_1) folgt dann sofort aus (δx_1) , wenn man $\cos$ mit $\sin$ vertauscht. Endlich ergibt sich ebenso für (δz_1) dieselbe Form wie für (δy_1) , nur dass für (δz_1) die Summe 13) wieder $= 0$, dagegen $c_1 + c_2$ ungerade ist.

Beschränkt man sich auf den ersten Grad, so erhält man also, wenn man noch der Kürze wegen wieder

$$i(\zeta_1 - \zeta_2) = \psi$$

setzt, folgende Glieder:

$$17) \quad (\delta x_1) = \Sigma [(K_i^1) \cos (\psi + \zeta_1) \\ + e_1 (K_i^2) \cos (\psi + \pi_1) + e_1 (K_i^3) \cos (\psi + 2\zeta_1 - \pi_1) \\ + e_2 (K_i^4) \cos (\psi + \pi_2) + e_2 (K_i^5) \cos (\psi + 2\zeta_2 - \pi_2)],$$

$$18) \quad (\delta y_1) = \Sigma [(K_i^1) \sin (\psi + \zeta_1) \\ + e_1 (K_i^2) \sin (\psi + \pi_1) + e_1 (K_i^3) \sin (\psi + 2\zeta_1 - \pi_1) \\ + e_2 (K_i^4) \sin (\psi + \pi_2) + e_2 (K_i^5) \sin (\psi + 2\zeta_2 - \pi_2)],$$

$$19) \quad (\delta z_1) = \Sigma [i_1 (K_i^6) \sin (\psi + \zeta_1 - \Omega_1) + i_2 (K_i^7) \sin (\psi + \zeta_2 - \Omega_2)],$$

wo die (K_i) nur von a_1 und a_2 abhängende Coefficienten vorstellen, die man nach obigen Angaben zu berechnen hat. Dabei ist zu berücksichtigen, dass man, um die Störungen bis zum n^{ten} Grade zu erhalten, die Störungsfunction bis zum $(n+1)^{\text{ten}}$ Grade entwickelt haben muss.

Jetzt wollen wir zu dem säcularen Theil $[R_1]$ der Störungsfunction und den ihm entsprechenden Gliedern $[\delta x_1]$, $[\delta y_1]$, $[\delta z_1]$ übergehen. Für diesen Theil ist:

$$\frac{\partial [R_1]}{\partial \zeta_1} = 0$$

und

$$\int \frac{\partial [R_1]}{\partial a_1} \cdot dt = t \cdot \frac{\partial [R_1]}{\partial a_1} \text{ u. s. w.}$$

Hieraus folgt also:

$$20) \quad [\delta x_1] = t \cdot \left[(a, \varepsilon)_1 \cdot \frac{\partial [R_1]}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \zeta_1} \right. \\ + (e, \pi)_1 \cdot \left(\frac{\partial [R_1]}{\partial e_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \pi_1} - \frac{\partial [R_1]}{\partial \pi_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial e_1} \right) + (e, \varepsilon)_1 \cdot \frac{\partial [R_1]}{\partial e_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \zeta_1} \\ + (i, \Omega)_1 \cdot \left(\frac{\partial [R_1]}{\partial i_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \Omega_1} - \frac{\partial [R_1]}{\partial \Omega_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial i_1} \right) + (i, \varepsilon)_1 \cdot \frac{\partial [R_1]}{\partial i_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \zeta_1} \\ \left. + (i, \pi)_1 \cdot \left(\frac{\partial [R_1]}{\partial i_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \pi_1} - \frac{\partial [R_1]}{\partial \pi_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial i_1} \right) \right].$$

Entsprechende Ausdrücke ergeben sich für $[\delta y_1]$ und $[\delta z_1]$. Durch Entwicklung der Formel 20) erhält man nun:

$$21) \quad [\delta x_1] = t \cdot \Sigma [K] e_1^{\alpha_1} \cdot e_2^{\alpha_2} \cdot i_1^{\beta_1} \cdot i_2^{\beta_2} \cdot \sin (a_1 \zeta_1 + b_1 \pi_1 + b_2 \pi_2 \\ + c_1 \Omega_1 + c_2 \Omega_2).$$

Für die ganzen hier eingehenden Zahlen gelten dieselben Bedingungen wie für 16), nur dass α_2 stets $= 0$ ist. $[\delta y_1]$ entsteht

aus $[\delta x_1]$ durch Vertauschung von $\sin$ mit $-\cos$. $[\delta z_1]$ hat dieselbe Form, wie $[\delta y_1]$, nur dass dasselbe zu sagen ist, wie für (δz_1) im Verhältniss zu (δy_1) .

Endlich treten noch in den sechs Integralen $\int \frac{\partial R_1}{\partial a_1} dt$ u. s. w. der Gleichungen 15), § 22, sechs willkürliche Constante auf, die wir mit $\{a_1\}$, . . . bezeichnen wollen. Diese ergeben noch folgendes Zusatzglied: $\{\delta x_1\}$ zu δx_1 ,

$$\{\delta x_1\} = \frac{3n_1}{a_1} \cdot (a, \varepsilon)_1 \cdot \{\zeta_1\} \cdot t \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \zeta_1} + \frac{\partial x_1}{\partial \zeta_1} \cdot (a, \varepsilon)_1 \cdot \{a_1\} + \dots$$

Die Constanten $\{a_1\}$, $\{e_1\}$, . . . kann man ganz willkürlich wählen.

LAPLACE setzt:

$$\{\zeta_1\} = -\frac{a_1}{3n_1} \cdot \frac{[\partial R_1]}{\partial a_1},$$

und erreicht dadurch den Vortheil, dass in $[\delta x] + \{\delta x\}$ das der Zeit t proportionale Glied, welches von $\frac{[\partial R_1]}{\partial a_1}$ abhängt, verschwindet. $\{a_1\}$, $\{i_1\}$ und $\{\Omega_1\}$ setzt er ohne Weiteres $= 0$, dagegen nimmt er für $\{e_1\}$ und $\{\pi_1\}$ zwei bestimmte Werthe an, um seine Formeln um unbedeutendes zu vereinfachen.

So haben wir denn die allgemeine Form der Störungen ersten Grades in Bezug auf die störenden Massen entwickelt. Geht man von diesen zu den Störungen zweiten Grades über, so schwillt natürlich die Rechnung ausserordentlich an, jedoch übersieht man leicht, dass diese Störungen aus Gliedern von folgenden drei Formen bestehen:

$$K \frac{\cos}{\sin} L, \quad Kt \frac{\cos}{\sin} L, \quad Kt^2 \frac{\cos}{\sin} L,$$

nur dass K und L die Elemente dreier Planeten, nämlich des gestörten und zweier störenden enthalten können. In den Störungen dritten Grades würden Glieder mit dem Factor t^3 vorkommen, in welchem die Elemente von vier Planeten, nämlich des gestörten und dreier störender enthalten sind u. s. w.

Die Berechnung dieser Störungen ist im allgemeinen langwierig genug und deswegen ist es gut, wenn man eine einfache Controlle für ihre Richtigkeit besitzt. Eine solche ergibt sich aber folgendermaassen. Man bezeichne mit M_1' das, was aus 15a) wird, wenn man das Glied, welches das Quadrat von $(a_1 n_1 + a_2 n_2)$ im

Nenner hat, entfernt, und ausserdem bei den übrigen den Nenner $a_1 n_1 + a_2 n_2$ ganz fortlässt. Dadurch gehe (δx_1) in $(\delta' x_1)$ über. Ausserdem lasse man in 21) den Factor t weg und verwandle die $\sin$ in $\cos$, durch welche Procedur $[\delta x_1]$ in $[\delta' x_1]$ übergehen mag. Dann ist identisch:

$$(\delta' x_1) + [\delta' x_1] = 0.$$

Denn die linke Seite ist dann die Entwicklung von:

$$\frac{\partial R_1}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial a_1}{\partial x_1'} + \frac{\partial R_1}{\partial e_1} \cdot \frac{\partial e_1}{\partial x_1'} + \dots$$

welcher Ausdruck nach § 25 = 0 ist.

Wir haben gesehen, dass die Störungen ersten Grades der störenden Massen in zwei grosse Gruppen zerfallen. Die erste Gruppe besteht aus Gliedern, von denen jedes von der Form:

$$a \cdot \cos(bt + c)$$

ist, wo a, b, c constant sind. Die zweite Gruppe besteht dagegen aus Gliedern von der Form:

$$at \cdot \cos(bt + c).$$

Wenn die von uns vorausgesetzte Entwicklung der Coordinaten und der Störungsfunctionen convergirt (was für die Elemente unseres Planetensystems der Fall ist), so convergiren auch die Entwicklungen für (δx) und $[\delta x]$. Die letzteren aber schwellen, weil die Zeit t als Factor auftritt, mit der Zeit trotz der Kleinheit der Massen über alle Maassen an und gilt Entsprechendes für die Störungen der höheren Grade. Hieraus folgt sonnenklar, dass das Verfahren nur für gewisse, allerdings oft Jahrzehnte und Jahrhunderte umfassende Zeiträume convergiren kann und dass es vor allen Dingen das säculare Glied der Störungsfunction ist, dem das Anwachsen der Störungen zuzuschreiben ist.

Dieses Auftreten des Factors t hat die früheren Mathematiker, besonders EULER, LAPLACE und LAGRANGE zu merkwürdigen und für uns etwas seltsamen Speculationen veranlasst, welche bezweckten, ihn zu beseitigen. Man findet darüber ausführliches in der *Mécanique céleste*, Tome I, pag. 266. Es waren diese Versuche die Vorläufer einer zweiten grossen Theorie, durch welche sie überflüssig gemacht worden sind. Diese Theorie, die Theorie der Variation der Elemente, wollen wir in den nächsten Paragraphen entwickeln.

§ 28.

Die Variation der Elemente.

Die Grundgedanken, welche zu der hier zu entwickelnden Theorie geführt haben, sind sehr einfach und klar. In einem gegebenen Augenblicke haben alle Planeten bestimmte Coordinaten und bestimmte Geschwindigkeiten um die als ruhend gedachte Sonne, um welche sie ewig unveränderliche Ellipsen beschreiben würden, deren Elemente nach der in § 2 angegebenen Weise von diesen Coordinaten und Geschwindigkeiten abhängen, wenn die Sonne allein sie anzöge und sie keine gegenseitige Anziehung, sowie keine Anziehung auf die Sonne ausübten. Welchen Augenblick man dann auch wählte, man müsste stets zu denselben Werthen für die Elemente gelangen.

So aber wird man für verschiedene Augenblicke auch verschiedene Elemente erhalten. Doch der Kleinheit der Planetenmassen wegen wird es für eine geraume Zeit so scheinen, als ob die Elemente constant wären, als ob in der That die Planeten sich den KEPLER'schen Gesetzen gemäss in Ellipsen bewegten. In wie hohem Grade dies der Fall ist, folgt unmittelbar daraus, dass ja KEPLER diese Gesetze aus den Beobachtungen durch seine unvergleichlich scharfsinnigen Combinationen herausgefunden hat. Erst allmählig werden diese Beobachtungen, welche immer mehr oder minder ungenau sind, keinen Zweifel mehr darüber lassen, dass die Ellipse sich langsam geändert, oder mit anderen Worten, dass die Bahnelemente sich geändert haben. Diese Veränderung geht offenbar stetig, wenn auch vergleichsweise langsam vor sich. Bestimmt man also in jedem Moment diejenigen Ellipsen, welche die Planeten in Folge der gerade in diesem Moment geltenden Coordinaten und Geschwindigkeiten beschreiben würden, wenn die gegenseitige Anziehung der Planeten aufhörte, so kann man sagen, dass die Planeten in diesen Ellipsen nur einen Augenblick verweilen, um sofort in die sich unmittelbar anschliessenden überzugehen. Die wirkliche Bahn eines Planeten wird von allen ihm im Laufe der Zeitmomente zugehörenden Ellipsen berührt und ist die sogenannte „Einhüllende“ derselben.

Diese Anschauungsweise ist nun in die Sprache der Analysis zu übersetzen. Die Elemente der Ellipse eines Planeten werden hier angenommen als näher zu bestimmende Functionen der Zeit. Ist diese Bestimmung aber einmal erfolgt, so gelten wieder die Formeln der §§ 1—4 genau so wie früher und es werden genau wie früher die Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten als Functionen der

Elemente $a, e, i, \Omega, \pi, \varepsilon$ und der Zeit t ausgedrückt. Insofern werden sie und alle von ihnen abhängenden Grössen im Allgemeinen die Zeit t auf zwei ganz verschiedene Weisen enthalten, nämlich erstens explicite, wie sie in der mittleren Länge auftritt und zweitens implicite, da die Elemente Functionen der Zeit sind.

Wir haben jetzt zu untersuchen, wie die Elemente als Functionen der Zeit zu bestimmen sind. Stellt man sich z. B. x nach § 4 durch die Elemente und die Zeit ausgedrückt vor, so folgt:

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{\partial x}{\partial e} \cdot \frac{de}{dt} + \dots \\ &= \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \cdot n + \frac{\partial x}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{\partial x}{\partial e} \cdot \frac{de}{dt} + \dots \end{aligned}$$

Nun sollen aber die Geschwindigkeitscomponenten ebenfalls die Elemente und die Zeit in derselben Weise wie früher enthalten. D. h. es soll sein:

$$2) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} = x' = \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \cdot n \quad \text{u. s. w.}$$

Aus 1) und 2) folgt also:

$$3) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial x}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{\partial x}{\partial e} \cdot \frac{de}{dt} + \dots \\ 0 &= \frac{\partial y}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{\partial y}{\partial e} \cdot \frac{de}{dt} + \dots \\ 0 &= \frac{\partial z}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{\partial z}{\partial e} \cdot \frac{de}{dt} + \dots \end{aligned} \right.$$

Aus 2) fliessen durch Differentiation die Ausdrücke für die zweiten Differentialquotienten:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial x'}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{\partial x'}{\partial e} \cdot \frac{de}{dt} + \dots$$

durch deren Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$4) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{\mu x}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial x}$$

diese sich unter Berücksichtigung, dass:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = - \frac{\mu x}{r^3}$$

verwandelt in:

$$5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x'}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{\partial x'}{\partial e} \cdot \frac{de}{dt} + \dots = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \text{und ebenso} \\ \frac{\partial y'}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{\partial y'}{\partial e} \cdot \frac{de}{dt} + \dots = \frac{\partial R}{\partial y}, \\ \frac{\partial z'}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{\partial z'}{\partial e} \cdot \frac{de}{dt} + \dots = \frac{\partial R}{\partial z}. \end{array} \right.$$

Die Gleichungen 3) und 5) stellen, nachdem man die Coefficienten von $\frac{da}{dt}$, $\frac{de}{dt}$, $\dots$, sowie $\frac{\partial R}{\partial x} \dots$ durch die Elemente und die Zeit ausgedrückt hat, sechs Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen diesen Variablen vor, die eigenthümliche analytische Umformungen des ursprünglichen Systems 4) bilden. Die Gleichungen 5) sind natürlich für alle Planeten aufzustellen. LAGRANGE gelang es nun, mit Hilfe seiner Symbole diese Gleichungen so umzugestalten, dass sie eine einfachere Behandlung gestatteten. Multiplicirt man nämlich 5) der Reihe nach mit $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial y}{\partial a}$, $\frac{\partial z}{\partial a}$, und 3) mit $-\frac{\partial x'}{\partial a}$, $-\frac{\partial y'}{\partial a}$, $-\frac{\partial z'}{\partial a}$, so folgt durch Addition:

$$6) \quad \left\{ \begin{array}{l} [a, a] \cdot \frac{da}{dt} + [a, e] \cdot \frac{de}{dt} + [a, i] \cdot \frac{di}{dt} + \dots = \frac{\partial R}{\partial a} \\ \text{und ebenso} \\ [e, a] \cdot \frac{da}{dt} + [e, e] \cdot \frac{de}{dt} + [e, i] \cdot \frac{di}{dt} + \dots = \frac{\partial R}{\partial e} \\ \text{u. s. w.} \end{array} \right.$$

Die Gleichungen 6) sind nach $\frac{da}{dt}$, $\frac{de}{dt} \dots$ aufzulösen. Nach den Entwicklungen des § 10 werden diese Auflösungen:

$$7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = (a, a) \cdot \frac{\partial R}{\partial a} + (e, a) \cdot \frac{\partial R}{\partial e} + (\varepsilon, a) \cdot \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \dots \\ \frac{de}{dt} = (a, e) \cdot \frac{\partial R}{\partial a} + (e, e) \cdot \frac{\partial R}{\partial e} + (\varepsilon, e) \cdot \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

also mit Anwendung der Tabelle 22), § 11:

$$8) \left\{ \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= 2 \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{de}{dt} &= - \frac{\sqrt{1-e^2} (1 - \sqrt{1-e^2})}{e \cdot \sqrt{a \cdot \mu}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} - \frac{1}{e} \sqrt{\frac{1-e^2}{a \cdot \mu}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \pi}, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= - 2 \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right) + \frac{\sqrt{1-e^2} (1 - \sqrt{1-e^2})}{e \cdot \sqrt{a \cdot \mu}} \cdot \frac{\partial R}{\partial e} \\ &\quad + \frac{1 - \cos i}{\sin i \sqrt{\mu \cdot a (1 - e^2)}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{d\pi}{dt} &= \frac{1}{e} \sqrt{\frac{1-e^2}{a \cdot \mu}} \cdot \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{1 - \cos i}{\sin i \sqrt{\mu \cdot a (1 - e^2)}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{-(1 - \cos i)}{\sin i \sqrt{\mu \cdot a (1 - e^2)}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} - \frac{1 - \cos i}{\sin i \sqrt{\mu \cdot a (1 - e^2)}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \pi} \\ &\quad - \frac{1}{\sin i \sqrt{\mu \cdot a (1 - e^2)}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{\sin i \sqrt{\mu \cdot a (1 - e^2)}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i}. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichungen 8), welche nach POISSON mit Leichtigkeit auch direkt abgeleitet werden können und welche auch LAPLACE im Supplement des zweiten Bandes seiner *Mécanique céleste* auf anderem, aber beschwerlicherem Wege gefunden hat, bilden die Grundlage der Theorie der Variation der Elemente. Sie haben den Vorzug, dass ihre rechten Seiten nur von den Störungsfunctionen abhängen und daher verhältnissmässig klein sind, dass nach den Elementen differentiirt wird und dass die Coefficienten die Zeit t nicht explicite enthalten.

Statt der Gleichungen 8) würde man noch einfachere erhalten haben, wenn man die in 7), § 13, eingeführten kanonischen Constanten benutzt hätte. Die entsprechenden Gleichungen würden hier lauten:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} &= - \frac{\partial R}{\partial \beta_1}, & \frac{d\alpha_2}{dt} &= - \frac{\partial R}{\partial \beta_2}, & \frac{d\alpha_3}{dt} &= - \frac{\partial R}{\partial \beta_3}, \\ \frac{d\beta_1}{dt} &= + \frac{\partial R}{\partial \alpha_1}, & \frac{d\beta_2}{dt} &= + \frac{\partial R}{\partial \alpha_2}, & \frac{d\beta_3}{dt} &= + \frac{\partial R}{\partial \alpha_3}. \end{aligned}$$

Da aber R nach steigenden Potenzen von e und i entwickelt worden ist, so ist für uns das System 8) zweckmässiger und werden wir daher dasselbe festhalten. Der Differentialquotient von R nach a

ist hier eingeklammert worden, weil er vollständig zu nehmen ist, d. h. einmal insofern, als a explicite in R enthalten ist und dann in der Verbindung:

$$9) \quad \zeta = nt + \varepsilon.$$

Führt man die mittlere Länge nach TISSERAND (Exposition, d'après les principes de JACOBI, de la méthode suivie par DELAUNAY — Journal de Mathématiques pures et appliquées 1868) statt ε ein, so vermeidet man den vollständigen Differentialquotienten nach a und daher das explicite Auftreten der Zeit. Es wird:

$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial R}{\partial \zeta},$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right) = \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a^5}} \cdot t \cdot \frac{\partial R}{\partial \zeta}.$$

Durch Differentiation von 9) erhält man weiter:

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dt} &= n - \frac{3}{2} \cdot t \cdot \sqrt{\frac{\mu}{a^5}} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{d\varepsilon}{dt} \\ &= -2 \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot \frac{\partial \left(\frac{\mu}{2a}\right)}{\partial a} - \frac{3}{2} \cdot t \cdot \sqrt{\frac{\mu}{a^5}} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{d\varepsilon}{dt}. \end{aligned}$$

Setzt man also noch:

$$10) \quad R' = R + \frac{\mu}{2a},$$

so folgt:

$$\begin{aligned} 11) \quad \frac{d\zeta}{dt} &= -2 \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot \frac{\partial R'}{\partial a} + \sqrt{\frac{1-e^2}{a \cdot \mu}} \cdot \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{e} \cdot \frac{\partial R'}{\partial e} \\ &\quad + \frac{1 - \cos i}{\sin i \sqrt{\mu \cdot a (1-e^2)}} \cdot \frac{\partial R'}{\partial i}. \end{aligned}$$

Wenn man will, kann man auch in den übrigen Gleichungen 8) R' an Stelle von R setzen. Die Gleichung 11) hat den Vortheil, dass sie sofort den Differentialquotienten der mittleren Länge nach der Zeit ergibt.

Ein weiterer zu berücksichtigender Umstand besteht darin, dass $\frac{d\pi}{dt}$ und $\frac{d\Omega}{dt}$ unendlich gross werden, wenn e , resp. $i = 0$ sind. Es ist dies selbstverständlich, da für sehr kleine Werthe der Excentricitäten resp. Neigungen schon sehr kleine Veränderungen der Bahn sehr grosse Schwankungen des Perihels resp. Knotens verursachen.

Um diesem Umstand aus dem Wege zu gehen, führt LAGRANGE statt e, i, π, Ω vier neue Variable durch die Gleichungen ein:

$$12) \quad \begin{cases} h = e \sin \pi, & p = \sin i \sin \Omega, \\ l = e \cos \pi, & q = \sin i \cos \Omega, \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{de}{dt} \cdot \frac{h}{e} + \frac{d\pi}{dt} \cdot l, \\ \frac{dl}{dt} &= \frac{de}{dt} \cdot \frac{l}{e} - \frac{d\pi}{dt} \cdot h, \\ \frac{dp}{dt} &= p \cotg i \cdot \frac{di}{dt} + \frac{d\Omega}{dt} \cdot q, \\ \frac{dq}{dt} &= q \cotg i \cdot \frac{di}{dt} - \frac{d\Omega}{dt} \cdot p, \end{aligned}$$

ferner:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial e} &= \frac{\partial R}{\partial h} \cdot \frac{h}{e} + \frac{\partial R}{\partial l} \cdot \frac{l}{e}, \\ \frac{\partial R}{\partial \pi} &= \frac{\partial R}{\partial h} \cdot l - \frac{\partial R}{\partial l} \cdot h, \\ \frac{\partial R}{\partial i} &= \left(p \frac{\partial R}{\partial p} + q \frac{\partial R}{\partial q} \right) \cdot \cotg i, \\ \frac{\partial R}{\partial \Omega} &= \frac{\partial R}{\partial p} \cdot q - \frac{\partial R}{\partial q} \cdot p. \end{aligned}$$

Durch Einführung von 12) in das System 8) erhält dieses eine etwas weniger übersichtliche Gestalt, welche aber den Vortheil bietet, dass für verschwindende Excentricitäten und Neigungen keine unendlich grossen Coefficienten entstehen. Vielmehr lassen sich diese Coefficienten nach Potenzen von h, l, p, q entwickeln und gilt dasselbe für die Störungfunction R . Wir werden später die Substitutionen 12) wirklich anwenden, uns dabei auf den zweiten Grad der Neigungen und Excentricitäten beschränkend.

§ 29.

Ueber eine angenäherte Integration der Differentialgleichungen für die Variation der Elemente.

Die Differentialgleichungen 8) des vorigen Paragraphen sind eigenthümliche Umformungen des ursprünglichen Systems 2), § 21, und ist es daher selbstverständlich, dass eine wirkliche Integration auch hier

unausführbar ist. Doch haben diese Gleichungen 8) einen ausserordentlich wesentlichen Vorzug, wenn es gilt, eine angenäherte Integration zu leisten, die sich vornehmlich auf zwei Momente stützt. Das erste ist die Kleinheit der Störungsfunction R , das zweite die analytische Form, in welche dieselbe gebracht worden ist.

Nehmen wir z. B. die erste Gleichung 8). Aus ihr folgt:

$$1) \quad a = \int_0^t 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \zeta} \cdot dt.$$

Damit haben wir nun allerdings nichts gewonnen. Denn um das Integral ausführen zu können, muss man die Elemente als Functionen der Zeit bereits bestimmt, also die Aufgabe, auf welche es ankommt, gelöst haben. In 1) haben wir dasselbe, als ob Jemand etwa aus der Gleichung $x^n = x + \alpha$ die Unbekannte x durch die Formel $x = \sqrt[n]{x + \alpha}$ bestimmen wollte. Doch gerade so wie diese Formel bei Annäherungsverfahren (wenn nämlich ein angenäherter Werth von x bekannt ist) verwendet werden kann, so kann uns auch die Formel 1) bei geschickter Benutzung der Entwicklung von R zu ähnlichen Zwecken dienen.

Wir haben gesehen, dass R in einen periodischen Theil (R) und einen säcularen $[R]$ zerfällt. Es sei:

$$2) \quad k \frac{\cos}{\sin} \{i_1 \zeta_1 + i_2 \zeta_2\}$$

irgend ein periodisches Glied von R_1 . (Von jetzt an wollen wir wieder Indices zur Unterscheidung des gestörten Planeten von dem störenden einführen.) Dieses Glied ruft nach 8), § 28, in jedem der Differentialquotienten der Elemente ein Glied von derselben Form 2) hervor und daher in den Elementen selbst Glieder von der Form:

$$3) \quad \int k \frac{\cos}{\sin} \{i_1 \zeta_1 + i_2 \zeta_2\} dt.$$

Wären die Elemente nicht variabel, so würde dieses Integral ohne Weiteres ausgeführt werden können und ergeben:

$$4) \quad \frac{k}{i_1 n_1 + i_2 n_2} \cdot \frac{\sin}{\cos} \{i_1 \zeta_1 + i_2 \zeta_2\}.$$

Es lässt sich aber nachweisen, dass der Kleinheit der störenden Massen wegen auch jetzt noch 4) sehr angenähert das Integral von 3) vorstellt. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}
& \int k \frac{\cos}{\sin} (i_1 \zeta_1 + i_2 \zeta_2) dt \\
&= \int \frac{k}{i_1 n_1 + i_2 n_2} \cdot \frac{\cos}{\sin} \{i_1 \zeta_1 + i_2 \zeta_2\} d(i_1 \zeta_1 + i_2 \zeta_2) \\
&= \int k \frac{\cos}{\sin} \{i_1 \zeta_1 + i_2 \zeta_2\} \left[\frac{d(i_1 \zeta_1 + i_2 \zeta_2)}{(i_1 n_1 + i_2 n_2) dt} - 1 \right] dt.
\end{aligned}$$

Das zweite Glied der rechten Seite ist aber, wenn man sich der Formel 11), § 28, bedient, ein Integral, dessen Integrand nur von den zweiten Potenzen der störenden Massen abhängt, da sowohl k als auch $\left[\frac{d(i_1 \zeta_1 + i_2 \zeta_2)}{(i_1 n_1 + i_2 n_2) dt} - 1 \right]$ in Bezug auf diese Massen von der ersten Ordnung ist. Vernachlässigt man daher die zweite Potenz der störenden Massen, so folgt durch theilweise Integration:

$$\begin{aligned}
\int k \frac{\cos}{\sin} (i_1 \zeta_1 + i_2 \zeta_2) dt &= \int \frac{k}{i_1 n_1 + i_2 n_2} \cdot d \left(-\frac{\sin}{\cos} \{i_1 \zeta_1 + i_2 \zeta_2\} \right) \\
&= \frac{k}{i_1 n_1 + i_2 n_2} \cdot -\frac{\sin}{\cos} \{i_1 \zeta_1 + i_2 \zeta_2\} \\
&\quad - \int -\frac{\sin}{\cos} (i_1 \zeta_1 + i_2 \zeta_2) \cdot \frac{d \left(\frac{k}{i_1 n_1 + i_2 n_2} \right)}{dt} \cdot dt.
\end{aligned}$$

Nun ist auch $\frac{d \left(\frac{k}{i_1 n_1 + i_2 n_2} \right)}{dt}$ von der zweiten Ordnung in Bezug auf die störenden Massen. Unter Vernachlässigung des Integrals auf der rechten Seite geht diese also in 4) über.

Es zeigt sich demnach, dass ein periodisches Glied der Störungsfunktion in den Elementen Störungen hervorruft, die von demselben Argument $i_1 \zeta_1 + i_2 \zeta_2$ abhängen. Die Coefficienten $\frac{k}{i_1 n_1 + i_2 n_2}$ sind den störenden Massen proportional und erreichen daher im Allgemeinen keinen bedeutenden Werth. Somit sehen wir:

Ein periodisches Glied von R wirkt bald vergrößernd, bald verkleinernd auf die Elemente, lässt sie aber im Grossen und Ganzen unverändert.

Wesentlich anders gestaltet sich aber der Einfluss, den das säculäre Glied $[R]$ von R ausübt. Dieses erzeugt in den Differentialquo-

tienten der Elemente eben solche säculare Glieder und würden daher bei der Integration, wenn die Elemente constant wären, der Zeit t proportionale Glieder entstehen. Der Veränderlichkeit der Elemente wegen wird dies nun allerdings nicht der Fall sein, aber man begreift doch leicht, dass die Wirkung des säcularen Gliedes mit der Zeit sehr tief gehen und eine völlige Umgestaltung der Elemente zur Folge haben kann.

Hiernach ist der Weg, den man bei der angenäherten Integration der Differentialgleichungen 8), § 28, einzuschlagen hat, wie folgt vorgezeichnet. Man beschränke sich in R auf das säculare Glied $[R]$, setze dieses in 8) ein und suche die so vereinfachten Differentialgleichungen zu integrieren. Die sich ergebenden Werthe für die Elemente sind nicht die wahren, für einen Moment stattfindenden, sondern die sogenannten säcularen Werthe der Elemente und muss man noch zu ihnen, um die wirklichen Elemente zu bestimmen, die oben erwähnten periodischen Glieder

$$\frac{k}{i_1 n_1 + i_2 n_2} \cdot \frac{\sin}{\cos} \{i_1 \zeta_1 + i_2 \zeta_2\}$$

hinzufügen. In diese hat man nun statt der Elemente deren säcularen Werthe einsetzen. Erst dann sind die Elemente vollständig, so dass man mit ihrer Hilfe die Coordinaten berechnen kann.

Wenn auch dieses Verfahren nicht ganz exact ist, so sind doch die Fehler für so grosse Zeiträume so gering, dass es eine sehr grosse Annäherung an die Wahrheit giebt.

§ 30.

Die säcularen Werthe der Elemente. Entwicklung der exacten, zwischen ihnen stattfindenden Gleichungen.

Wie wir in § 26 gesehen haben, hängt der säculare Theil der Störungsfunctionen $R_1, R_2, \dots$ nur von der einen Grösse:

$$1) \quad V = \sum \frac{m_\lambda \cdot m_\mu}{r_{\lambda\mu}}$$

ab. Bezeichnet man denselben mit W und ersetzt die Elemente durch ihre rein säcularen Werthe, so folgt aus 8), § 28, da:

$$2) \quad \frac{\partial W}{\partial \zeta_1} = \frac{\partial W}{\partial \zeta_2} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 & m_1 \frac{da_1}{dt} = 0, \\
 & m_1 \frac{d\zeta_1}{dt} = m_1 n_1 - 2 \sqrt{\frac{a_1}{\mu_1}} \cdot \frac{\partial W}{\partial a_1} + \sqrt{\frac{1-e_1^2}{\mu_1 \cdot a_1}} \cdot \frac{1 - \sqrt{1-e_1^2}}{e_1} \cdot \frac{\partial W}{\partial e_1} \\
 & \quad + \frac{1 - \cos i_1}{\sin i_1 \sqrt{\mu_1 a_1 (1-e_1^2)}} \cdot \frac{\partial W}{\partial i_1}, \\
 & m_1 \frac{de_1}{dt} = - \frac{1}{e_1} \cdot \sqrt{\frac{1-e_1^2}{\mu_1 a_1}} \cdot \frac{\partial W}{\partial \pi_1}, \\
 & m_1 \frac{d\pi_1}{dt} = \frac{1 - \cos i_1}{\sin i_1 \sqrt{\mu_1 a_1 (1-e_1^2)}} \cdot \frac{\partial W}{\partial i_1} + \frac{1}{e_1} \cdot \sqrt{\frac{1-e_1^2}{\mu_1 a_1}} \cdot \frac{\partial W}{\partial e_1}, \\
 & m_1 \frac{di_1}{dt} = - \frac{1 - \cos i_1}{\sin i_1 \sqrt{\mu_1 a_1 (1-e_1^2)}} \cdot \frac{\partial W}{\partial \pi_1} \\
 & \quad - \frac{1}{\sin i_1 \sqrt{\mu_1 a_1 (1-e_1^2)}} \cdot \frac{\partial W}{\partial \Omega_1}, \\
 & m_1 \frac{d\Omega_1}{dt} = \frac{1}{\sin i_1 \sqrt{\mu_1 a_1 (1-e_1^2)}} \cdot \frac{\partial W}{\partial i_1}.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Diese Gleichungen sind für jeden Planeten aufzustellen und aus ihnen die Elemente (oder vielmehr deren säculare Werthe) zu bestimmen. Da ζ in W nicht enthalten ist, wird man aus 3) zunächst die zweite Gleichung ausschalten, um nach Berechnung von a , e , π , i , Ω die mittlere Länge ζ aus dieser Gleichung durch reine Quadratur zu ermitteln.

Die erste der Gleichungen 3) ist ohne Weiteres integrabel und ergibt:

$$4) \quad a_1 = \text{constans, d. h.}:$$

Die grosse Achse jedes Planeten bleibt, von periodischen Schwankungen abgesehen, unveränderlich.

Dieses vorzügliche Resultat ist zuerst von LAPLACE abgeleitet worden, jedoch nur als Annäherung, indem er die höheren Potenzen der Excentricitäten und Neigungen vernachlässigte. Erst LAGRANGE gelang es durch Vervollkommnung der Theorie — mit einem Federstrich, wie JACOBI sagt — diesen Hauptsatz aus der ganzen Theorie der Störungen in seiner ganzen Allgemeinheit zu beweisen.

Aus den 4 letzten Gleichungen des Systems 3) folgt:

$$\frac{\partial W}{\partial e_1} \cdot \frac{de_1}{dt} + \frac{\partial W}{\partial \pi_1} \cdot \frac{d\pi_1}{dt} + \frac{\partial W}{\partial i_1} \cdot \frac{di_1}{dt} + \frac{\partial W}{\partial \Omega_1} \cdot \frac{d\Omega_1}{dt} = 0.$$

Ebenso werden die Variationen die W durch Veränderung der Elemente der übrigen Planeten erleidet, gleich 0. Es ist also:

$$5) \quad \begin{cases} \frac{dW}{dt} = 0, \\ W = \text{constans.} \end{cases}$$

Weiter erhält man aus 3):

$$\frac{d(m_1 \sqrt{\mu_1 a_1 (1-e_1^2)} \cdot \cos i_1)}{dt} = \frac{\partial W}{\partial \pi_1} + \frac{\partial W}{\partial \Omega_1}.$$

Nun ist nach § 24:

$$\frac{\partial W}{\partial \pi_1} + \frac{\partial W}{\partial \Omega_1} + \frac{\partial W}{\partial \pi_2} + \frac{\partial W}{\partial \Omega_2} + \dots = 0,$$

und somit ergibt die Addition der obigen Gleichung zu ihren entsprechenden und nachfolgende Integration:

$$6) \quad m_1 \sqrt{\mu_1 a_1 (1-e_1^2)} \cdot \cos i_1 + m_2 \sqrt{\mu_2 a_2 (1-e_2^2)} \cdot \cos i_2 + \dots = c_1,$$

d. h. die Summe der Flächen ist für die xy Ebene constant. Da diese beliebig gewählt ist, so kann man sie durch irgend eine andere, z. B. die xz Ebene und die yz Ebene ersetzen und erhält:

$$7) \quad \begin{aligned} & m_1 \sqrt{\mu_1 a_1 (1-e_1^2)} \cdot \sin i_1 \cdot \cos \Omega_1 \\ & + m_2 \sqrt{\mu_2 a_2 (1-e_2^2)} \cdot \sin i_2 \cdot \cos \Omega_2 + \dots = c_2, \end{aligned}$$

$$8) \quad \begin{aligned} & m_1 \sqrt{\mu_1 a_1 (1-e_1^2)} \cdot \sin i_1 \cdot \sin \Omega_1 \\ & + m_2 \sqrt{\mu_2 a_2 (1-e_2^2)} \cdot \sin i_2 \cdot \sin \Omega_2 + \dots = c_3. \end{aligned}$$

Die Gleichungen 5), 6), 7), 8) sind die einzigen exacten bekannten zwischen den säcularen Werthen der Elemente stattfindenden Integrale, wobei die Unveränderlichkeit der grossen Achse nicht mitgezählt wird. Die drei letzten unter ihnen werden besonders interessant, wenn nur zwei Planeten vorhanden sind. Aus ihnen folgt durch Elimination:

$$9) \quad 0 = \begin{vmatrix} c_1, & \cos i_1, & \cos i_2, \\ c_2, & \sin i_1 \cos \Omega_1, & \sin i_2 \cos \Omega_2, \\ c_3, & \sin i_1 \sin \Omega_1, & \sin i_2 \sin \Omega_2. \end{vmatrix}$$

Wählt man speciell als xy Ebene die unveränderliche Ebene, so wird $c_2 = c_3 = 0$ und 9) ergibt:

$$0 = \sin(\Omega_1 - \Omega_2), \quad \text{also} \quad \Omega_1 = \Omega_2,$$

d. h. die Bahnebenen schneiden die unveränderliche Ebene beständig

in einer und derselben geraden Linie, oder mit anderen Worten: der gemeinsame Knoten beider Ebenen wandert auf der festen unveränderlichen Ebene. Aus 7) oder 8) folgt weiter:

$$10) \quad m_1 \sqrt{\mu_1 a_1 (1 - e_1^2)} \cdot \sin i_1 + m_2 \sqrt{\mu_2 a_2 (1 - e_2^2)} \cdot \sin i_2 = 0,$$

und kann man nach 6) und 10) i_1 und i_2 berechnen, sobald e_1 und e_2 bekannt sind.

Da andere exacte Integrale von 3) nicht bekannt sind, muss man versuchen, angenäherte zu erstreben und wollen wir im nächsten Paragraphen diesen Weg einschlagen.

§ 31.

Angenäherte Berechnung der säcularen Werthe der Elemente.

Beschränkt man sich in dem säcularen Theil W der Störungsfunktion auf die Glieder bis zum zweiten Grade der Excentricitäten und Neigungen, so ist nach 14), § 26:

$$1) \quad W = \sum m_\lambda \cdot m_\mu \left[\frac{1}{2} I_0 + \frac{1}{8} III_1 (e_\lambda^2 + e_\mu^2 - i_\lambda^2 - i_\mu^2 + 2i_\lambda \cdot i_\mu \cdot \cos(\Omega_\lambda - \Omega_\mu)) - \frac{1}{4} III_2 \cdot e_\lambda \cdot e_\mu \cdot \cos(\pi_\lambda - \pi_\mu) \right],$$

oder mit Einführung der Substitutionen 12), § 28:

$$2) \quad W = \sum m_\lambda \cdot m_\mu \left[\frac{1}{2} I_0 + \frac{1}{8} III_1 (h_\lambda^2 + h_\mu^2 + l_\lambda^2 + l_\mu^2 - (p_\lambda - p_\mu)^2 - (q_\lambda - q_\mu)^2) - \frac{1}{4} III_2 (h_\lambda \cdot h_\mu + l_\lambda \cdot l_\mu) \right].$$

Die Differentialgleichungen 3) des vorigen Paragraphen vereinfachen sich unter Vernachlässigung von Gliedern dritten und höheren Grades in:

$$3) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_\lambda \cdot \frac{dh_\lambda}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu_\lambda a_\lambda}} \cdot \frac{\partial W}{\partial l_\lambda} \\ m_\lambda \cdot \frac{dl_\lambda}{dt} = - \frac{1}{\sqrt{\mu_\lambda a_\lambda}} \cdot \frac{\partial W}{\partial h_\lambda} \\ m_\lambda \cdot \frac{dp_\lambda}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu_\lambda a_\lambda}} \cdot \frac{\partial W}{\partial q_\lambda} \\ m_\lambda \cdot \frac{dq_\lambda}{dt} = - \frac{1}{\sqrt{\mu_\lambda a_\lambda}} \cdot \frac{\partial W}{\partial p_\lambda} \end{array} \right. \quad (\lambda = 1 \dots n).$$

Hier ist $\sqrt{\mu_\lambda a_\lambda}$ für jeden Werth von λ positiv zu rechnen, da alle Planeten sich in Bezug auf die xy Ebene im positiven Sinne um die Sonne bewegen. Setzt man für W seinen Ausdruck 2) ein, so

sieht man auf der Stelle, dass die Differentialgleichungen für h und l sich vollständig von denen für p und q trennen. D. h.:

Die säcularen Variationen der Excentricitäten und Perihelien einerseits, sowie diejenigen der Neigungen und Knoten andererseits gehen unabhängig von einander vor sich.

Gehen wir daher zunächst an die Berechnung der säcularen Werthe der Excentricitäten und Perihelien. Wir können uns dann in W auf die von den h und l abhängigen Glieder beschränken. Diese zerfallen wieder unmittelbar in zwei Gruppen, nämlich in die nur h enthaltenden und in die nur l enthaltenden. Diese beiden Gruppen sind:

$$4) \quad V_1 = \sum m_\lambda \cdot m_\mu \left[\frac{1}{8} III_1 (h_\lambda^2 + h_\mu^2) - \frac{1}{4} III_2 h_\lambda \cdot h_\mu \right],$$

$$5) \quad V_2 = \sum m_\lambda \cdot m_\mu \left[\frac{1}{8} III_1 (l_\lambda^2 + l_\mu^2) - \frac{1}{4} III_2 l_\lambda \cdot l_\mu \right].$$

Es sind V_1 und V_2 homogene Functionen zweiten Grades der h resp. l und zwar sind dieselben wesentlich positiv, da nach § 26, Seite 204, stets

$$6) \quad III_1 > III_2.$$

Durch Einsetzen von 4) und 5) in die ersten beiden Gleichungen des Systems 3) gehen dieselben über in:

$$7) \quad \begin{cases} m_\lambda \cdot \frac{dh_\lambda}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu_\lambda a_\lambda}} \cdot \frac{\partial W}{\partial l_\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\mu_\lambda a_\lambda}} \cdot \frac{\partial V_2}{\partial l_\lambda}, \\ m_\lambda \cdot \frac{dl_\lambda}{dt} = - \frac{1}{\sqrt{\mu_\lambda a_\lambda}} \cdot \frac{\partial W}{\partial h_\lambda} = - \frac{1}{\sqrt{\mu_\lambda a_\lambda}} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial h_\lambda}. \end{cases}$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen werden nach 4) und 5) homogene lineare Functionen der l , beziehungsweise h und somit sind die Gleichungen 7) $2n$ simultane lineare Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten, deren Integration mit Hilfe von Exponentialgrössen nach bekannten Methoden sofort ausgeführt werden kann. Um aber diese Integration möglichst elegant zu gestalten, ist es zweckmässig, das System 7) mit Hilfe der, des positiven Vorzeichens von $\sqrt{\mu_\lambda a_\lambda}$ wegen reellen Substitutionen:

$$8) \quad h_\lambda \sqrt{m_\lambda \sqrt{\mu_\lambda a_\lambda}} = H_\lambda, \quad l_\lambda \sqrt{m_\lambda \sqrt{\mu_\lambda a_\lambda}} = L_\lambda$$

in das kanonische System:

$$9) \quad \frac{dH_\lambda}{dt} = \frac{\partial W}{\partial L_\lambda}, \quad \frac{dL_\lambda}{dt} = - \frac{\partial W}{\partial H_\lambda}$$

zu verwandeln, wobei man in W , also auch in V ebenfalls die H und L einzuführen hat. Bildet man noch die Abkürzungen:

$$10) \quad \begin{cases} (\lambda, \mu) = \frac{1}{4} III_1(a_\lambda, a_\mu) \cdot \frac{m_\mu}{\sqrt{\mu_\lambda \cdot a_\lambda}}, \\ [\lambda, \mu] = -\frac{1}{4} III_2(a_\lambda, a_\mu) \cdot \frac{\sqrt{m_\lambda \cdot m_\mu}}{\sqrt{\mu_\lambda \cdot a_\lambda \mu_\mu \cdot a_\mu}}, \end{cases}$$

so dass:

$$11) \quad [\lambda, \mu] = [\mu, \lambda], \quad (\lambda, \mu) \cdot m_\lambda \cdot \sqrt{\mu_\lambda a_\lambda} = (\mu, \lambda) \cdot m_\mu \cdot \sqrt{\mu_\mu a_\mu},$$

und setzt ferner:

$$12) \quad (\lambda, 1) + (\lambda, 2) + (\lambda, 3) \cdots + (\lambda, n) = [\lambda, \lambda],$$

so wird:

$$\begin{aligned} 13) \quad V_1 &= \frac{1}{2} ([1, 1] H_1^2 + [2, 2] H_2^2 + [3, 3] H_3^2 + \cdots + [n, n] H_n^2 \\ &\quad + 2[1, 2] H_1 \cdot H_2 + 2[1, 3] H_1 \cdot H_3 + \cdots) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \sum_{\mu=1}^{\mu=n} [\lambda, \mu] \cdot H_\lambda \cdot H_\mu, \end{aligned}$$

ebenso wird:

$$14) \quad V_2 = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \sum_{\mu=1}^{\mu=n} [\lambda, \mu] \cdot L_\lambda \cdot L_\mu.$$

Wir wollen nun noch die quadratische Function einführen:

$$\begin{aligned} 15) \quad \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) &= [1, 1] x_1^2 + [2, 2] x_2^2 + \cdots \\ &\quad + 2[1, 2] x_1 \cdot x_2 + \cdots \\ &= \sum \sum [\lambda, \mu] \cdot x_\lambda \cdot x_\mu. \end{aligned}$$

Dann ist also:

$$15a) \quad \begin{cases} V_1 = \frac{1}{2} \varphi(H_1, H_2, \dots, H_n), \\ V_2 = \frac{1}{2} \varphi(L_1, L_2, \dots, L_n). \end{cases}$$

Die weitere Behandlung des Problems hängt nun, wie wir nachher sehen werden, von der Transformation der quadratischen Form φ mittelst einer orthogonalen Substitution in eine Summe von Quadraten ab, einer Transformation, mit welcher sich viele der berühmtesten Mathematiker (CAUCHY, JACOBI, HESSE, KUMMER, BORCHARDT u. s. w.) eingehend beschäftigt haben. Daher ist es zweckmässig, uns zunächst die vorzüglichen Resultate, zu welchen sie gelangt sind, in das Gedächtniss zurückzurufen.

Die orthogonale Substitution sei:

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Unbekannten $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{3,1}$, . . . , so erhält man folgende Endgleichung für g_1 :

$$21) \quad 0 = \begin{vmatrix} [1,1] - g, & [2,1], & [3,1], & \dots & \dots \\ [1,2], & [2,2] - g, & [3,2], & \dots & \dots \\ [1,3], & [2,3], & [3,3] - g, & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Diese Endgleichung für g liefert die n Werthe $g_1, g_2, \dots, g_n$. Jeder Wurzel, z. B. g_λ , entspricht nach 20) ein System von Werthen:

$$22) \quad \alpha_{1,\lambda}, \alpha_{2,\lambda}, \dots, \alpha_{n,\lambda},$$

zu deren genauer Bestimmung noch die Gleichung zu benutzen ist

$$23) \quad \alpha_{1,\lambda}^2 + \alpha_{2,\lambda}^2 + \alpha_{3,\lambda}^2 + \dots + \alpha_{n,\lambda}^2 = 1.$$

Da die Determinante 21) symmetrisch ist und überdies sämtliche $[\lambda, \mu]$ reell sind, so werden alle Wurzeln g reell. Demnach werden die Coefficienten α der Substitution 16) auch reell und dass sie übrigens den Bedingungen 18) genügen, wenn die g sämtlich verschieden sind, ist leicht nachzuweisen. Aber wenn die Gleichung 21) eine mehrfache Wurzel g_λ besitzt, so sollte man meinen, dass die Transformation illusorisch wird, weil dann jeder dieser gleichen Wurzeln g_λ nach 20) und 23) nur ein System von Werthen 22) zu entsprechen scheint. Indessen folgt aus den Untersuchungen der Mathematiker, dass dem nicht so sei, dass nämlich, wenn sämtliche $[\lambda, \mu]$ reell sind, wie es hier der Fall ist, für eine mehrfache Wurzel g_λ nicht allein die Determinante 21), sondern ihre sämtliche Unterdeterminanten bis zum $(\lambda - 1)^{\text{ten}}$ Grade inclusive verschwinden, so dass aus 20) und 23) für diese Wurzel so viel Systeme 22) folgen, als der Grad der Vielfachheit der Wurzel g_λ beträgt. Daraus folgt, dass die Substitution 16) immer möglich ist, gleichgiltig, ob die Gleichung 21) gleiche Wurzeln habe oder nicht.

Uebrigens sind die g sämtlich positiv, weil φ eine wesentlich positive quadratische Form vorstellt. Sie sind, wie die Rechnung ergibt, für unser Planetensystem, wenn man für die $[\lambda, \mu]$ ihre numerischen, nur von den Massen und grossen Achsen abhängenden Werthe einsetzt, sämtlich verschieden. Allerdings kennt man die Massen der Planeten noch nicht alle mit hinreichender Genauigkeit, indessen hat man doch bewiesen, dass der aus dieser mangelhaften

eine kanonische. Das heisst, es sind die Poisson'schen Ausdrücke:

$$\sum_{\mu} \left(\frac{\partial H_{\lambda}}{\partial M_{\mu}} \cdot \frac{\partial L_{\lambda}}{\partial N_{\mu}} - \frac{\partial H_{\lambda}}{\partial N_{\mu}} \cdot \frac{\partial L_{\lambda}}{\partial M_{\mu}} \right)$$

der Einheit gleich, während alle übrigen Poisson'schen Ausdrücke verschwinden, wie unmittelbar aus den Gleichungen 18) folgt. Demnach verwandeln sich die Gleichungen 9) ohne Weiteres in:

$$26) \quad \frac{dM_\lambda}{dt} = \frac{\partial W}{\partial N_\lambda}, \quad \frac{dN_\lambda}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial M_\lambda}.$$

Die Function W ist nun aber nach 15 a) in den neuen Variablen M und N ausgedrückt:

$$W = \frac{1}{2}(g_1 M_1^2 + g_2 M_2^2 + \dots) + \frac{1}{2}(g_1 N_1^2 + g_2 N_2^2 + \dots).$$

Die Gleichungen 26) werden mithin:

$$27) \quad \frac{dM_\lambda}{dt} = g_\lambda \cdot N_\lambda, \quad \frac{dN_\lambda}{dt} = -g_\lambda \cdot M_\lambda.$$

Die $2n$ Differentialgleichungen 26) resp. 27) zerfallen also in n Paare, welche ohne Umstände integrirt werden können. Es folgt:

$$28) \quad \begin{cases} M_\lambda = K_\lambda \cdot \sin (g_\lambda t + \delta_\lambda) \\ N_\lambda = K_\lambda \cdot \cos (g_\lambda t + \delta_\lambda) \end{cases} \quad (\lambda = 1, 2 \dots n),$$

wo K_2 und δ_2 die beiden Integrationsconstanten sind. Durch Einsetzen von 28) in 24) erhält man endlich die Lösung der vorgelegten Differentialgleichungen 7) oder 3) in der Gestalt:

[illegible]

Diese Gleichungen stellen die vollständigen Lösungen der Differentialgleichungen 3) dar und geben somit die säcularen Werthe der Excentricitäten und Perihellängen. Wir wollen aus ihnen einige Folgerungen ziehen. Setzt man in 29) für h und l wieder ihre Werthe ein:

$$h_\lambda = e_\lambda \cdot \sin \pi_\lambda, \quad l_\lambda = e_\lambda \cdot \cos \pi_\lambda,$$

so ergibt sich durch Quadriren der Gleichungen 29) und Summiren:

$$30) \quad e_1^2 \cdot m_1 \sqrt{\mu_1 a_1} + e_2^2 \cdot m_2 \sqrt{\mu_2 a_2} + \dots = K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 \dots$$

Die auf der rechten Seite stehende Constante ist, wie man sich durch Einsetzen der jetzt geltenden Excentricitäten in die linke Seite überzeugt, sehr klein und hat LAPLACE hieraus den Schluss gezogen, dass alle Excentricitäten immer sehr klein bleiben. Doch hat LAGRANGE darauf mit Recht entgegnet, dass ein m_λ sehr klein im Verhältniss zu den übrigen Massen sein könne, und dass in diesem Falle e_λ gross werden kann, ohne dass das Glied $e_\lambda^2 \cdot m_\lambda \sqrt{\mu_\lambda a_\lambda}$ sich über das Niveau der anderen erhebt.

Die Gleichungen 29) ergeben ferner:

$$31) \quad e_\lambda^2 \cdot m_\lambda \sqrt{\mu_\lambda a_\lambda} = \alpha_{\lambda,1}^2 K_1^2 + \alpha_{\lambda,2}^2 K_2^2 + \alpha_{\lambda,3}^2 K_3^2 + \dots \\ + 2\alpha_{\lambda,1} \cdot \alpha_{\lambda,2} K_1 \cdot K_2 \cdot \cos[(g_1 - g_2)t + \delta_1 - \delta_2] + \dots$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass der Maximalwerth, welchen e_λ niemals überschreiten kann:

$$= \frac{[\alpha_{\lambda,1} K_1] + [\alpha_{\lambda,2} K_2] + \dots}{\sqrt{m_\lambda \sqrt{\mu_\lambda a_\lambda}}}$$

ist. Dieser Ausdruck ist für jeden Werth von λ , wie die numerischen Bestimmungen ergeben, klein, so dass in der That die Excentricitäten stets innerhalb kleiner Grenzen bleiben. Doch wäre es andererseits ein besonderer Ausnahmefall, wenn für einen Augenblick eine Bahn vollständig kreisförmig würde, weil dann für diese Bahn h und l gleichzeitig verschwinden müssten.

Zur Bestimmung der Perihellängen hat man aus 29) die Gleichungen:

$$32) \quad \operatorname{tg} \pi_\lambda = \frac{\alpha_{\lambda,1} K_1 \sin(g_1 t + \delta_1) + \alpha_{\lambda,2} K_2 \sin(g_2 t + \delta_2) + \alpha_{\lambda,3} K_3 \sin(g_3 t + \delta_3) + \dots}{\alpha_{\lambda,1} K_1 \cos(g_1 t + \delta_1) + \alpha_{\lambda,2} K_2 \cos(g_2 t + \delta_2) + \alpha_{\lambda,3} K_3 \cos(g_3 t + \delta_3) + \dots}$$

Das geometrische Gesetz, nach dem sich π_λ mit der Zeit t ändert, ist demnach schwer übersichtlich. Doch kann man nachweisen, dass die Perihellängen im Grossen und Ganzen eine fortschreitende, d. h. positive Bewegung besitzen. Durch Differentiation von 32) folgt nämlich:

$$33) \quad e_\lambda^2 \cdot m_\lambda \sqrt{\mu_\lambda a_\lambda} \cdot \frac{d\pi_\lambda}{dt} = \alpha_{\lambda,1}^2 \cdot K_1^2 \cdot g_1 + \alpha_{\lambda,2}^2 \cdot K_2^2 \cdot g_2 + \dots \\ + \alpha_{\lambda,1} \cdot \alpha_{\lambda,2} \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot (g_1 + g_2) \cdot \cos[(g_1 - g_2)t + \delta_1 - \delta_2] + \dots$$

Die constanten Glieder der rechten Seite sind positiv. Die periodischen Glieder dieser Seite sind zu Zeiten positiv, zu Zeiten aber negativ, so dass allerdings $d\pi_\lambda$ auch negativ werden kann, jedoch nur zeitweise, gewissermaassen als Unterbrechung des positiven Vorzeichens. Dies folgt auch durch Integration von 33), welche ergibt:

$$\int e_{\lambda}^2 m_{\lambda} \sqrt{\mu_{\lambda} a_{\lambda}} d\pi_{\lambda} = (\alpha_{\lambda,1}^2 K_1^2 g_1 + \alpha_{\lambda,2}^2 K_2^2 g_2 + \dots)t \\ + \alpha_{\lambda,1} \cdot \alpha_{\lambda,2} \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot \frac{g_1 + g_2}{g_1 - g_2} \sin[(g_1 - g_2)t + \delta_1 - \delta_2] + \dots$$

Das der Zeit proportionale Glied wächst unaufhörlich, während die periodischen Glieder niemals eine bestimmte Grenze überschreiten können. Allerdings scheint in dem hieraus zu folgendem Schluss, dass π_{λ} im Grossen und Ganzen wächst, dann eine Lücke einzutreten, wenn zwei g , etwa g_1 und g_2 einander gleich sind, weil dann der Nenner $g_1 - g_2$ verschwindet. Doch auch dann muss $d\pi_{\lambda}$ im Grossen und Ganzen wachsen, weil die rechte Seite von 33) auch so geschrieben werden kann:

$$[\alpha_{\lambda,1} K_1 \sqrt{g_1} \cdot \sin(g_1 t + \delta_1) + \alpha_{\lambda,2} K_2 \sqrt{g_2} \cdot \sin(g_2 t + \delta_2) + \dots]^2 \\ + [\alpha_{\lambda,1} K_1 \sqrt{g_1} \cdot \cos(g_1 t + \delta_1) + \alpha_{\lambda,2} K_2 \sqrt{g_2} \cdot \cos(g_2 t + \delta_2) + \dots]^2 \\ + \alpha_{\lambda,1} \cdot \alpha_{\lambda,2} K_1 K_2 (\sqrt{g_1} - \sqrt{g_2})^2 \cdot \cos[(g_1 - g_2)t + \delta_1 - \delta_2] + \dots$$

so dass für $g_1 = g_2$ das letzte aufgeschriebene Glied ganz verschwindet.

Durch Addition aller aus 33) durch Veränderung von λ entstehenden Gleichungen folgt:

$$\sum_{\lambda} e_{\lambda}^2 \sqrt{\mu_{\lambda} a_{\lambda}} \frac{d\pi_{\lambda}}{dt} = K_1^2 g_1 + K_2^2 g_2 + K_3^2 g_3 + \dots,$$

so dass, da die rechte Seite positiv ist, niemals alle Perihellängen zugleich eine retrograde Bewegung besitzen können. Uebrigens folgt aus den numerischen Resultaten, dass in diesem Jahrtausend die Perihelien sämtlicher Hauptplaneten eine positive Bewegung zeigen, mit Ausnahme der Venus, für welche diese Bewegung ein wenig retrograd ist.

Wenn in der Gleichung 32) der absolute Werth eines Coefficienten, etwa $[\alpha_{\lambda,1} K_1]$ grösser ist als die Summe der absoluten Werthe der anderen $[\alpha_{\lambda,2} K_2] + [\alpha_{\lambda,3} K_3] + \dots$, so lässt sich leicht beweisen, dass π_{λ} beständig um den Mittelwerth $g_1 t + \delta_1$ oder $g_1 t + \delta_1 + \pi$ schwankt, je nachdem $\alpha_{\lambda,1} \cdot K_1$ positiv oder negativ ist. Denn es folgt aus 32):

$$\operatorname{tg} [\pi_{\lambda} - (g_1 t + \delta_1)] \\ = \frac{\alpha_{\lambda,2} K_2 \sin[(g_2 - g_1)t + (\delta_2 - \delta_1)] + \alpha_{\lambda,3} K_3 \sin[(g_3 - g_1)t + \delta_3 - \delta_1] + \dots}{\alpha_{\lambda,1} K_1 + \alpha_{\lambda,2} K_2 \cos[(g_2 - g_1)t + \delta_2 - \delta_1] + \alpha_{\lambda,3} K_3 \cos[(g_3 - g_1)t + \delta_3 - \delta_1] + \dots}$$

Der Nenner kann nun nach der gemachten Voraussetzung niemals verschwinden und also $\operatorname{tg} [\pi_{\lambda} - (g_1 t + \delta_1)]$ niemals unendlich werden,

so dass der Winkel $\pi_\lambda - (g_\lambda t + \delta_\lambda)$ in der That nur Schwankungen um 0 oder um π ausführt, deren Grösse stets unter $\frac{\pi}{2}$ bleibt. Ist noch g_1 die grösste Wurzel von 21), so wächst π_λ beständig.

Hat man die Gleichungen 29) mit den $2n$ Integrationsconstanten K und δ aufgestellt, so handelt es sich nur noch darum, diese zu bestimmen, wenn die Excentricitäten und Perihellängen, also auch die h und l , beziehungsweise H und L für einen gegebenen Zeitmoment gegeben sind. Hierzu bedient man sich am zweckmässigsten der Gleichungen 25), welche nach der Substitution 28) sich verwandeln in:

$$34) \quad \begin{cases} K_\lambda \sin(g_\lambda t + \delta_\lambda) = \alpha_{1,\lambda} H_1 + \alpha_{2,\lambda} H_2 + \dots + \alpha_{n,\lambda} H_n, \\ K_\lambda \cos(g_\lambda t + \delta_\lambda) = \alpha_{1,\lambda} L_1 + \alpha_{2,\lambda} L_2 + \dots + \alpha_{n,\lambda} L_n. \end{cases}$$

Aus diesen folgt durch Division:

$$35) \quad \operatorname{tg}(g_\lambda t + \delta_\lambda) = \frac{\alpha_{1,\lambda} H_1 + \alpha_{2,\lambda} H_2 + \dots}{\alpha_{1,\lambda} L_1 + \alpha_{2,\lambda} L_2 + \dots}.$$

Hat man aus 35) δ_λ berechnet, so ergibt eine der Gleichungen 34) den willkürlichen Factor K_λ . Uebrigens ist die Bestimmung von δ_λ zweideutig, da man δ_λ um π vermehren kann, wodurch das Vorzeichen von K_λ verändert wird.

Hiermit ist die Theorie der säcularen Variationen der Excentricitäten und Perihellängen vollständig dargestellt. Entsprechende Entwicklungen gelten nun für die Neigungen und Knotenlängen. Der für diese in Betracht kommende Theil der Störungsfunction W ist:

$$- \sum \frac{1}{8} III_1(a_\lambda, a_\mu) [(p_\lambda - p_\mu)^2 + (q_\lambda - q_\mu)^2].$$

Auch hier wird man neue Variable P_λ und Q_λ durch die Gleichungen einführen:

$$36) \quad p_\lambda \sqrt{m_\lambda \sqrt{\mu_\lambda a_\lambda}} = P_\lambda, \quad q_\lambda \sqrt{m_\lambda \sqrt{\mu_\lambda a_\lambda}} = Q_\lambda,$$

wodurch die Differentialgleichungen zwischen den p und q werden:

$$37) \quad \frac{dP_\lambda}{dt} = \frac{\partial W}{\partial Q_\lambda}, \quad \frac{dQ_\lambda}{dt} = - \frac{\partial W}{\partial P_\lambda}.$$

An Stelle der in 15) eingeführten quadratischen Function ϕ tritt hier die ebenfalls quadratische Function:

$$38) \quad \psi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = |1, 1| x_1^2 + |2, 2| x_2^2 + \dots \\ + 2|1, 2| x_1 \cdot x_2 + \dots$$

wobei der Kürze wegen die Bezeichnungen eingeführt werden:

$$|1, 1| = -[1, 1], \quad |2, 2| = -[2, 2], \quad \dots$$

(wo $[1,1]$, $[2,2]$. . . ihre alten in 12) angegebenen Werthe behalten) und:

$$39) \quad |1,2| = \frac{1}{4} III_1(a_1, a_2) \cdot \frac{\sqrt{m_1 \cdot m_2}}{\sqrt{\mu_1 \cdot a_1 \cdot \mu_2 \cdot a_2}}.$$

Die Transformationsformeln 16) mögen hier werden:

$$40) \quad \begin{cases} x_1 = \beta_{1,1} y_1 + \beta_{1,2} y_2 + \dots \\ x_2 = \beta_{2,1} y_1 + \beta_{2,2} y_2 + \dots \\ \dots \end{cases}$$

und möge durch sie ψ übergeführt werden in:

$$41) \quad \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \gamma_1 y_1^2 + \gamma_2 y_2^2 + \gamma_3 y_3^2 + \dots$$

Die Endgleichung 21) wird hier:

$$42) \quad 0 = \begin{vmatrix} |1,1| - \gamma, & |2,1|, & |3,1|, & \dots \\ |1,2|, & |2,2| - \gamma, & |3,2|, & \dots \\ |1,3|, & |2,3|, & |3,3| - \gamma, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Dieselbe liefert die n Wurzeln $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. Es lässt sich nun ohne Weiteres beweisen, dass eine dieser Wurzeln gleich Null ist. Die Function ψ ist nämlich, wie die Function:

$$- \sum \frac{1}{8} III_1(a_\lambda, a_\mu) \cdot [(p_\lambda - p_\mu)^2]$$

wesentlich negativ, d. h. sie ist für alle nicht verschwindenden Werthsysteme der x negativ. Ausgenommen ist nur der Fall, dass alle p einander gleich sind, d. h. dass die x zu den Grössen:

$$43) \quad \sqrt{m_1} \sqrt{\mu_1 a_1}, \quad \sqrt{m_2} \sqrt{\mu_2 a_2} \dots$$

proportional sind. Denn man kann ψ auch in der Form schreiben:

$$\psi = - \sum \frac{1}{4} III_1(a_\lambda, a_\mu) \cdot \left(\frac{x_\lambda}{\sqrt{m_\lambda} \sqrt{\mu_\lambda a_\lambda}} - \frac{x_\mu}{\sqrt{m_\mu} \sqrt{\mu_\mu a_\mu}} \right)^2.$$

Aus dieser Form geht unmittelbar hervor, dass die Determinante von ψ verschwindet. Diese entsteht aber aus 42), wenn man $\gamma = 0$ setzt, so dass also in der That eine Wurzel, etwa γ_n , verschwindet.

Aus dem System, welches dem System 20) entspricht, folgt für diese Wurzel:

$$44) \quad \beta_{1,n} : \beta_{2,n} \dots = \sqrt{m_1} \sqrt{\mu_1 a_1} : \sqrt{m_2} \sqrt{\mu_2 a_2} \dots$$

Die übrigen Wurzeln $\gamma_1 \dots \gamma_{n-1}$ sind dann nach Obigem sämtlich negativ und hat man für diese genau so weiter zu operiren, wie vorher mit den Wurzeln der Gleichung 21).

Die entsprechenden Gleichungen zu 29) werden hier:

[illegible]

Aus 44) folgt, dass in allen p ein und dasselbe constante Glied:

$$P = \frac{\beta_{1,n}}{\sqrt{m_1} \sqrt{\mu_1 a_1}} \cdot K_n' \sin \delta_n' = \frac{\beta_{2,n}}{\sqrt{m_2} \sqrt{\mu_2 a_2}} \cdot K_n' \sin \delta_n' = \dots$$

und in allen q ebenfalls ein und dasselbe constante Glied:

$$Q = \frac{\beta_{1,n}}{\sqrt{m_1} \sqrt{\mu_1 a_1}} \cdot K_n' \cos \delta_n'$$

enthalten ist.

Diese beiden Constanten kann man in den Ausdrücken für p und q verschwinden lassen, wenn man die unveränderliche Ebene (welche nach dem vorigen Paragraphen keine säcularen Schwankungen erleidet) als xy Ebene nimmt. Die Gleichungen 45) ergeben nämlich unter Anwendung von 44):

$$P = \frac{\beta_{1,n}}{\sqrt{m_1} \sqrt{\mu_1 a_1}} \cdot (p_1 m_1 \sqrt{\mu_1 a_1} + p_2 m_2 \sqrt{\mu_2 a_2} + \dots),$$

$$Q = \frac{\beta_{1,n}}{\sqrt{m_1} \sqrt{\mu_1 a_1}} \cdot (q_1 m_1 \sqrt{\mu_1 a_1} + q_2 m_2 \sqrt{\mu_2 a_2} + \dots).$$

Die eingeklammerten Summen stellen aber die linken Seiten der Gleichungen 7) und 8), § 30, vor, welche Null werden, wenn die xy Ebene zugleich unveränderliche Ebene ist.

Weil sämmtliche Wurzeln der Gleichung 42) negativ sind, mit Ausnahme von $\gamma_n = 0$, so besitzen die Bahnknoten im Grossen und Ganzen eine retrograde Bewegung. In der That gilt dies in diesem Jahrtausend für jeden Planeten.

LAGRANGE und LAPLACE haben an Stelle der Determinanten 21) resp. 42) andere unsymmetrische erhalten, deren leichte Zurückführbarkeit auf symmetrische erst JACOBI mitgetheilt hat. Sollen die

Elemente dieser letzteren reell sein, wie es zum Beweis der Reellität der g resp. γ nothwendig ist, so müssen alle Planeten in demselben Sinne sich um die Sonne bewegen. Daraus folgt aber nicht, dass die Abweichung des Drehungssinnes eines oder mehrerer Planeten von demjenigen der übrigen das Imaginärwerden eines oder mehrerer der g und γ zur Folge haben muss. Der Merkur z. B. mit seiner verhältnissmässig kleinen Masse würde bei retrograder Bewegung dies schwerlich bewirken, dagegen wahrscheinlich der Jupiter oder Saturn. Es würden dann in die allgemeinen Integrale der Gleichungen 3) Glieder von der Form $e^{\alpha t}$ hineingeführt werden, die schliesslich ohne Ende anwachsen. Doch ist es voreilig, in diesem Falle auf eine Tendenz, die Excentricitäten immer mehr zu vergrössern und schliesslich die Ellipsen gar in Hyperbeln überzuführen, schliessen zu wollen; vielmehr muss man sich erinnern, dass die Formeln 3) nur Annäherungsformeln vorstellen, die mit wachsenden Excentricitäten immer ungenauer werden. Man kann also wohl behaupten, dass die Excentricitäten dann in weiteren Grenzen sich bewegen, aber es ist nicht richtig, zu sagen, dass unbedingt die Ordnung unseres Planetensystems erschüttert werden würde.

In diesem Paragraphen sind die h, l, p, q als Summen von Gliedern dargestellt worden, von denen jedes von dem sinus oder cosinus eines der Zeit proportionalen Winkels abhängt. Alle diese Glieder sind daher periodisch und erlangen nach bestimmten, allerdings nach Jahrtausenden zu rechnenden Intervallen wieder dieselben Werthe. Ist g der Factor, mit dem die Zeit t in einem Gliede multiplicirt ist, so ist die Länge der Periode dieses Gliedes gleich $\frac{2\pi}{g}$. Der Kleinheit der g wegen werden diese Perioden ausserordentlich gross werden und in der That zeigt die numerische Berechnung, dass die kürzeste dieser Perioden etwa 50 000 Jahre umfasst. Man sieht also, dass die verhältnissmässig kurze Spanne Zeit, während welcher der Himmel ununterbrochen wissenschaftlich beobachtet wird, durchaus nicht hinreicht, um die oben abgeleiteten, so ausserordentlich einfachen und durchsichtigen Gesetze an den Erscheinungen zu bestätigen.

§ 32.

Die säcularen Variationen der mittleren Länge.

Nachdem in § 30 bewiesen, dass die grossen Achsen keine säcularen Veränderungen erleiden und nachdem in § 31 die säcularen

Werthe der Excentricitäten, der Neigungen, der Perihellängen und der Knotenlängen aufgestellt worden, ergeben sich die säcularen Werthe der mittleren Längen durch einfache Quadraturen. Die zugehörigen Formeln sind:

$$1) \quad m_\lambda \frac{d\zeta_\lambda}{dt} = m_\lambda \cdot n_\lambda - 2 \sqrt{\frac{a_\lambda}{\mu_\lambda}} \cdot \frac{\partial W}{\partial a_\lambda} \\ + \sqrt{\frac{1-e_\lambda^2}{a_\lambda \mu_\lambda}} \cdot \frac{1 - \sqrt{1-e_1^2}}{e_\lambda} \cdot \frac{\partial W}{\partial e_\lambda} \\ + \frac{1 - \cos i_\lambda}{\sin i_\lambda \sqrt{\mu_\lambda a_\lambda (1-e_\lambda^2)}} \cdot \frac{\partial W}{\partial i_\lambda}.$$

Für W hat man den Ausdruck § 31 Nr. 1) zu setzen. Beschränkt man sich auf die zweiten Potenzen der Excentricitäten und Neigungen, wird die Gleichung 1):

$$2) \quad \frac{d\zeta_\lambda}{dt} = n_\lambda - \sqrt{\frac{a_\lambda}{\mu_\lambda}} \cdot \sum_\mu m_\mu \frac{\partial (I_0(a_\lambda, a_\mu))}{\partial a_\lambda} \\ - 2 \sqrt{\frac{a_\lambda}{\mu_\lambda}} \cdot \sum_\mu m_\mu \left[\frac{1}{8} \cdot \frac{\partial (III_1(a_\lambda, a_\mu))}{\partial a_\lambda} \cdot (h_\lambda^2 + l_\lambda^2 + h_\mu^2 + l_\mu^2) \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \frac{\partial (III_2(a_\lambda, a_\mu))}{\partial a_\lambda} \cdot (h_\lambda h_\mu + l_\lambda l_\mu) \right] \\ + \frac{1}{\sqrt{\mu_\lambda \cdot a_\lambda}} \cdot \sum_\mu m_\mu \left[\frac{1}{8} III_1(a_\lambda, a_\mu) (h_\lambda^2 + l_\lambda^2) \right. \\ \left. - \frac{1}{8} III_2(a_\lambda, a_\mu) \cdot (h_\lambda h_\mu + l_\lambda l_\mu) \right] \\ + 2 \sqrt{\frac{a_\lambda}{\mu_\lambda}} \cdot \sum_\mu m_\mu \left[\frac{1}{8} \cdot \frac{\partial (III_1(a_\lambda, a_\mu))}{\partial a_\lambda} \cdot ((p_\lambda - p_\mu)^2 + (q_\lambda - q_\mu)^2) \right] \\ + \frac{1}{\sqrt{\mu_\lambda \cdot a_\lambda}} \cdot \sum_\mu m_\mu \left[\frac{1}{8} III_1(a_\lambda, a_\mu) (-p_\lambda^2 - q_\lambda^2 + p_\lambda p_\mu + q_\lambda q_\mu) \right].$$

Die erste Zeile der rechten Seite dieser Gleichung, in welcher μ alle Werthe von 1 bis n , exclusive λ zu durchlaufen hat, ist constant. Die beiden folgenden Glieder sind homogene quadratische Functionen der h und l . Setzt man in diese ihre in 29), § 31, angegebenen Werthe ein, so gehen sie in homogene quadratische Functionen der K über. Ordnet man nach den $\cos$ und $\sin$ der Winkel $gt + \delta$, so entstehen also in diesen beiden Zeilen erstens constante Glieder und zweitens Glieder von der Form $\Sigma a \cos [(g_\alpha - g_\beta)t + (\delta_\alpha - \delta_\beta)]$, wo

a einen constanten Coefficienten bedeutet. Ebenso entstehen in der vierten und fünften Zeile constante Glieder, so wie Glieder von der Form: $\Sigma b \cos [(\gamma_\alpha - \gamma_\beta)t + (\delta'_\alpha - \delta'_\beta)]$. Sammelt man also alle unter dem Summenzeichen Σ enthaltenen constanten Glieder und bezeichnet ihre Summe mit c_λ , so erhält die Gleichung 2) die Gestalt:

$$3) \quad \frac{d\zeta_\lambda}{dt} = n_\lambda + c_\lambda + \Sigma a \cdot \cos [(g_\alpha - g_\beta)t + \delta_\alpha - \delta_\beta] \\ + \Sigma b \cdot \cos [(\gamma_\alpha - \gamma_\beta)t + \delta'_\alpha - \delta'_\beta].$$

Ein sehr angenäherter Werth für c_λ ist:

$$4) \quad c_\lambda = -\sqrt{\frac{a_\lambda}{\mu_\lambda}} \cdot \sum_{\mu} m_\mu \cdot \frac{\partial (I_0(a_\lambda, a_\mu))}{\partial a_\lambda}.$$

Denn die übrigen Glieder von c_λ , welche aus den übrigen Gliedern von $\frac{d\zeta_\lambda}{dt}$ entspringen, sind nach Obigem homogene quadratische Functionen der kleinen Grössen K , resp. K' , sie sind also verglichen mit dem in 4) angegebenen Glied von c von der zweiten Ordnung in Bezug auf die Excentricitäten und Neigungen.

Die Gleichung 3) giebt sofort durch Integration:

$$5) \quad \zeta_\lambda = (n_\lambda + c_\lambda)t + \sum \frac{a}{g_\alpha - g_\beta} \cdot \sin [(g_\alpha - g_\beta)t + \delta_\alpha - \delta_\beta] \\ + \sum \frac{b}{\gamma_\alpha - \gamma_\beta} \cdot \sin [(\gamma_\alpha - \gamma_\beta)t + \delta'_\alpha - \delta'_\beta] + \varepsilon_\lambda,$$

wo ε_λ eine Integrationsconstante ist. Somit besteht der Ausdruck für die säculare mittlere Länge ζ_λ aus einem der Zeit proportionalen Glied und aus periodischen Gliedern, deren Perioden aus den säcularen Perioden der Excentricitäten und Neigungen zusammengesetzt sind. Die Coefficienten $\frac{a}{g_\alpha - g_\beta}$ beziehlich: $\frac{b}{\gamma_\alpha - \gamma_\beta}$ dieser Glieder haben nicht die störenden Massen als Factoren, denn wenn diese auch in den a und b auftreten, so sind dafür die g und γ auch diesen Massen proportional. Dagegen sind sie in Bezug auf die K , resp. K' vom zweiten Grade und, wie die numerische Rechnung zeigt, so klein, dass sie vernachlässigt werden können.

Diese Glieder, deren Vernachlässigung in der allgemeinen Planetentheorie erlaubt ist, spielen in einem verwandten Problem, in der Theorie der Mondbewegung, ihrer dort sich sehr bemerklich machenden Grösse wegen, eine bedeutende Rolle und hat LAPLACE aus ihnen

eine Erklärung der durch die Beobachtungen entdeckten sogenannten säculären Beschleunigung der Mondbewegung abgeleitet. Seine numerischen hierauf bezüglichen Resultate sind von neueren Astronomen angezweifelt worden.

Unter Vernachlässigung der säcular-periodischen Glieder folgt also:

$$6) \quad \zeta_\lambda = (n_\lambda + c_\lambda)t + \varepsilon_\lambda,$$

also genau derselbe Werth wie in 2), § 22, nur dass $n_\lambda = \sqrt{\frac{M + m_\lambda}{a_\lambda^3}}$ um ein kleines, nach 4) den störenden Massen proportionales Glied vermehrt werden muss. Es folgt daraus, dass das dritte KEPLER'sche Gesetz, welches schon dadurch, dass die $\mu_\lambda = M + m_\lambda$ nicht alle einander gleich sind, hat modificirt werden müssen, des Gliedes c_λ wegen eine weitere kleine Berichtigung erfahren muss, wenn man aus der Umlaufszeit, wie sie sich als Mittel von hunderten oder tausenden von Umläufen ergibt, die grosse Achse des Planeten oder umgekehrt berechnen will. Diese Umlaufszeit ist:

$$7) \quad T_\lambda = \frac{2\pi}{n_\lambda + c_\lambda} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{M + m_\lambda}{a_\lambda^3}} + c_\lambda}.$$

Als höchst wichtiges Endresultat der Untersuchung dieses Paragraphen folgt somit der Satz:

Das Jahr eines jeden Planeten, wie es als Mittel aus einer grossen Anzahl von Beobachtungen folgt, ist constant.

§ 33.

Die periodischen Glieder in den Elementen. Ueber eine Verbindung der Theorie der absoluten Störungen mit der Theorie der Variation der Elemente.

In den vorigen Paragraphen sind die säcularen Werthe der Elemente a , e , π , i , Ω , ζ bestimmt worden, wobei die Störungsfuction auf die Glieder vom zweiten Grade der Excentricitäten und Neigungen beschränkt wurde. Aber selbst unter der Voraussetzung einer ganz exacten Berechnung dieser säcularen Werthe werden die wirklichen Elemente von den säcularen um die früher angegebenen kleinen periodischen Beträge abweichen. Bezeichnet man also die säcularen Werthe zur näheren Kennzeichnung wieder mit $[a]$, $[e]$, . . . und die periodischen Glieder mit (a) , (e) , . . . , so werden die wirklichen Elemente durch die Formeln bestimmt:

$$1) \quad \begin{cases} a = [a] + (a), \\ e = [e] + (e), \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{cases}$$

Die periodischen Glieder entspringen aus den periodischen Gliedern der Störungsfunction, wenn man in diese an Stelle der Elemente $a, e, \dots \zeta$ ihre säcularen Werthe $[a], [e], \dots [\zeta]$ setzt. Es sei nun:

$$2) \quad k^{\cos}_{\sin} (a_1 [\zeta_1] + a_2 [\zeta_2])$$

ein solches periodisches Glied von R_1 . Setzt man der Kürze wegen:

$$3) \quad \begin{cases} a_1 [\zeta_1] + a_2 [\zeta_2] = \lambda, \\ a_1 [n_1] + a_2 [n_2] = \alpha, \end{cases}$$

so sind nach 8), § 28, die entsprechenden Glieder

$$4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{in } (a_1): \\ \quad = 2 \sqrt{\frac{[a_1]}{\mu_1}} \cdot k \frac{a_1}{\alpha} \cdot \frac{\cos}{\sin} (\lambda), \\ \text{in } (e_1): \\ \quad = \frac{-\sqrt{1-[e_1]^2} (1 - \sqrt{1-[e_1]^2})}{[e_1] \cdot \sqrt{[a_1] \mu_1}} \cdot k \frac{a_1}{\alpha} \cdot \frac{\cos}{\sin} (\lambda) \\ \quad - \frac{1}{[e_1]} \cdot \sqrt{\frac{1-[e_1]^2}{[a_1] \mu_1}} \cdot \frac{\partial k}{\partial [\pi_1]} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\sin}{-\cos} (\lambda), \\ \text{in } (\pi_1): \\ \quad = \frac{1}{[e_1]} \cdot \sqrt{\frac{1-[e_1]^2}{[a_1] \mu_1}} \cdot \frac{\partial k}{\partial [e_1]} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\sin}{-\cos} (\lambda) \\ \quad + \frac{1 - \cos [i_1]}{\sin [i_1] \cdot \sqrt{[a_1] \mu_1} (1 - [e_1]^2)} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial k}{\partial [i_1]} \cdot \frac{\sin}{-\cos} (\lambda), \\ \text{in } (i_1): \\ \quad = - \frac{1 - \cos [i_1]}{\sin [i_1] \cdot \sqrt{\mu_1 [a_1] (1 - [e_1]^2)}} \cdot k \frac{a_1}{\alpha} \cdot \frac{\cos}{\sin} (\lambda) \\ \quad - \frac{(1 - \cos [i_1]) \cdot \frac{\partial k}{\partial [\pi_1]} + \frac{\partial k}{\partial [\Omega_1]}}{\sqrt{\mu_1 [a_1] (1 - [e_1]^2)} \cdot \sin [i_1]} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\sin}{-\cos} (\lambda), \\ \text{in } (\Omega_1): \\ \quad = \frac{\frac{\partial k}{\partial [i_1]}}{\sin [i_1] \cdot \sqrt{\mu_1 [a_1] (1 - [e_1]^2)}} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\sin}{-\cos} (\lambda). \end{array} \right.$$

Es bleibt noch übrig, das entsprechende periodische Glied von ζ_1 zu entwickeln. Das erste Glied von $\frac{d\zeta_1}{dt}$ in 11), § 28, nämlich n_1 , hat nicht die störenden Massen als Factoren und muss man daher in dem Integral:

$$\int n_1 dt$$

auch auf die periodischen Glieder (n_1) Rücksicht nehmen. Nun ist:

$$n_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{a_1^3}} = \sqrt{\frac{\mu_1}{([a_1] + (a_1))^3}} = [n_1] \cdot \left(1 - \frac{3}{2} \frac{(a_1)}{[a_1]}\right).$$

und also:

$$\int n_1 dt = [n_1] \cdot t - \frac{3 [n_1]}{2 [a_1]} \cdot \int (a_1) dt.$$

Das dem Gliede 2) der Störungsfunction entsprechende Glied des auf der rechten Seite stehenden Integrals ist nach der ersten Formel 4)

$$= 2 \sqrt{\frac{[a_1]}{\mu_1}} \cdot k \cdot \frac{a_1}{\alpha^2} \cdot \frac{\sin}{\cos}(\lambda),$$

und daher ist das dem Gliede 2) entsprechende periodische Glied in (5)

$$\begin{aligned} 5) &= -\frac{3}{[a_1]^2} \cdot k \cdot \frac{a_1}{\alpha^2} \cdot \frac{\sin}{\cos}(\lambda) - 2 \sqrt{\frac{[a_1]}{\mu_1}} \cdot \frac{\partial k}{\partial [a_1]} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\sin}{\cos}(\lambda) \\ &+ \frac{\sqrt{1 - [e_1]^2} \cdot (1 - \sqrt{1 - [e_1]^2})}{[e_1] \sqrt{[a_1] \mu_1}} \cdot \frac{\partial k}{\partial [e_1]} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\sin}{\cos}(\lambda) \\ &+ \frac{1 - \cos [i_1]}{\sin [i_1] \cdot \sqrt{\mu_1 [a_1] (1 - [e_1]^2)}} \cdot \frac{\partial k}{\partial [i_1]} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\sin}{\cos}(\lambda). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Werthe in 1) erhält man die Elemente als vollständig bestimmte Functionen der Zeit, welche man demnach für jeden gegebenen Zeitpunkt berechnen kann. Nach dieser Bestimmung der Elemente folgen die Coordinaten nach § 5 genau so, als ob die Elemente constant wären.

So sind nun die Elemente in zwei Theile, einen säcularen und einen periodischen getrennt worden. Dieser letztere bleibt beständig den störenden Massen proportional, also beständig sehr klein. Der erstere ist nach den Entwicklungen der §§ 30 und 31 auch periodisch, aber die Perioden sind ganz andere, als die in den periodischen Gliedern unter den trigonometrischen Zeichen auftretenden mittleren Längen. Diese Perioden, die sogenannten säcularen Perioden, umfassen Jahrtausende und ändern sich demnach die säcularen Werthe

der Elemente (mit Ausnahme natürlich von dem der Zeit t proportionalen Gliede in $[\zeta]$) sehr langsam. Wir wollen nun sehen, wie man in den Endausdrücken der Coordinaten sehr zweckmässig die periodischen Glieder von den säcularen trennen kann.

Sei x irgend eine Coordinate. Dieselbe ist eine Function der Elemente, also:

$$x = x(a, e, i, \pi, \Omega, \zeta).$$

Setzt man für die Elemente ihre Werthe 1) ein, so ergibt sich:

$$6) \quad x = x([a] + (a), [e] + (e), \dots, [\zeta] + (\zeta)).$$

Entwickelt man die rechte Seite von 6) nach den Potenzen der kleinen den störenden Massen proportionalen Grössen (a) , (e) , $\dots$ und beschränkt sich in dieser Entwicklung auf die ersten Potenzen derselben, so wird:

$$7) \quad x = x([a], [e], [i], [\pi], [\Omega], [\zeta]) \\ + \frac{\partial x}{\partial [a]} \cdot (a) + \frac{\partial x}{\partial [e]} \cdot (e) + \dots + \frac{\partial x}{\partial [\zeta]} \cdot \zeta.$$

Die Zusatzglieder $\frac{\partial x}{\partial [a]} \cdot (a) + \dots$ sind aber nach § 22 und § 27 genau dieselben, wie die rein periodischen Glieder der absoluten Störungen ersten Grades. Demnach geht 7) über in:

$$8) \quad x = x([a], [e], \dots) + (\delta x)$$

Aus dieser Formel 8) fliesst folgende eigenthümliche Verbindung der beiden verschiedenen Methoden, die Bewegungen der Planeten zu ermitteln, der Theorie der Variation der Constanten und der Theorie der absoluten Störungen:

Man stelle sich zunächst einen fingirten — so zu sagen säcularen — Planeten vor, welcher sich mit der im § 32 bestimmten säcularen mittleren Bewegung in einer Ellipse sich bewegt, deren Elemente die säcularen Werthe der wirklichen sind. Der wirkliche Planet wird dann nach Maassgabe der periodischen Glieder immer um ein Geringes von diesem fingirten Planeten abweichen. Diese Abweichungen kann man zunächst ansehen als Folge der Abweichungen der Elemente von ihren säcularen Werthen, man kann sie aber auch nach 8) direct als absolute Störungen betrachten. Somit wird dann die Variation der Constanten angewendet, um dem Einfluss der säcularen Glieder der Störungfunction Rechnung zu tragen, während die Theorie der absoluten Störungen nur auf die periodischen Glieder der Störungfunction bezogen wird.

Es ist merkwürdig, dass diese Verbindung beider Methoden eher angewendet wurde, als diejenige der reinen Variation der Elemente. EULER und LAPLACE erkannten, dass die säcularen Glieder der Störungsfunction den wesentlichsten Einfluss auf diese Variation ausüben und sie fassten nur diesen Einfluss ins Auge. Erst LAGRANGE stellte die Theorie der Variation der Elemente in ihrer ganzen Reinheit auf, wie sie in § 28 auseinander gesetzt worden.

Die Astronomen wenden, wenn sie die Planetenörter wirklich berechnen wollen, in der Regel beide, in der eben beschriebenen Weise in einander greifende Methoden an und erhalten dadurch eine Darstellung der Formeln, welche sehr zweckmässig genannt werden muss.

§ 34.

Die Stabilität unseres Planetensystems.

Die tiefgehenden Resultate, welche die Theorie der Variation der Elemente an das Licht gebracht hat, bilden nicht allein eine sehr bedeutende Annäherung an die Wahrheit, sondern sie sind namentlich von der grössten Wichtigkeit für die Entscheidung der das tiefste Interesse beanspruchenden Frage nach der Stabilität unseres Planetensystems.

Sie setzen uns in den Stand, dieselbe durchaus bejahend zu beantworten. Natürlich immer unter der Einschränkung, dass eine Annäherung, zumal wenn ihre Schärfe schwer genau mathematisch bestimmbar ist, niemals die Stelle der mathematischen Wahrheit ersetzen kann.

Das Planetensystem erleidet allerdings im Laufe der Jahrtausende bedeutende Umgestaltungen. Doch treffen sie diejenigen beiden Elemente nicht, welche man mit vollstem Recht als die hauptsächlichsten bezeichnen kann, nämlich die mittleren Entfernungen der Planeten von der Sonne und ihre Umlaufszeiten um dieselbe. Hat man die letzteren als Mittel von hunderten oder tausenden von beobachteten Umläufen bestimmt, so ist man sicher, dass dieses Mittel die unveränderliche Umlaufszeit genau darstellt. Nach Ermittlung derselben ergeben sich nach dem dritten KEPLER'schen Gesetz unter Berücksichtigung der in § 32 gegebenen Berichtigung die genauen Werthe der grossen Achsen, welche der unmittelbaren Beobachtung unzugänglich sind. Wenngleich nun die Richtungen der Achsen im Raume, die Excentricitäten, die Bahnknoten und die Neigungen vollständige Umgestaltungen im Laufe der Zeiten erfahren, so bleibt die Stabilität des

Planetnsystems doch insofern vollkommen gewahrt, als die Excentricitäten immer klein bleiben, ebenso wie die Neigungen der Bahnebene gegen die unveränderliche Ebene.

Die Erkenntniss dieser vollkommenen Stabilität ist das schönste Resultat, welches man den Untersuchungen eines LAGRANGE und LAPLACE über unser Planetensystem verdankt. Die Befürchtungen, dass im Laufe der Jahrtausende die gegenseitige Anziehung der Planeten schliesslich einen Zusammenstoss derselben herbeiführen könne, sind hiernach vollständig zerstört; es werden vielmehr die Planeten im Laufe der Zeiten ebenso regelmässig um die Sonne kreisen, als ob diese allein ihnen vermittelt des Gesetzes der Schwere ihre Bahnen anwiese.

§ 35.

Der Einfluss der vernachlässigten säcularen Glieder der Störungsfunction, welche in Bezug auf die Excentricitäten und Neigungen von höherem als zweitem Grade sind.

In § 31 sind die säcularen Werthe der Elemente unter Vernachlässigung der Glieder höheren Grades der Störungsfunction entwickelt worden. Diese Vernachlässigung bewirkt, dass die Differentialgleichungen zwischen den h , l , p , q und der Zeit t in lineare mit constanten Coefficienten verwandelt werden. Sind die Excentricitäten und Neigungen sehr klein, so sind allerdings die vernachlässigten Glieder gegen die nicht vernachlässigten in den Differentialgleichungen selbst sehr klein. Indessen ist es von vornherein klar, dass ein sehr kleines Zusatzglied in einer Differentialgleichung einen bedeutenden Einfluss in der Integralgleichung ausüben kann, vorausgesetzt, dass die Zeit sich weit genug erstreckt.

So viel dem Verfasser bekannt, hat LEVERRIER zuerst versucht, die Glieder höheren Grades im säcularen Werth der Störungsfunction zu berücksichtigen in der Arbeit: *Intégration des équations différentielles, dont dépendent les inégalités séculaires, en tenant compte des termes, qui sont du troisième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons.*

Entwickelt man W bis zum 4^{ten} Grade inclusive, so sei:

$$1) \quad W = W_0 + W_2 + W_4,$$

wo W_0 , W_2 , W_4 die Glieder 0^{ten}, 2^{ten} und 4^{ten} Grades sind. Führt man die h , l , p , q ein, so giebt § 31, 2), sofort W_0 und W_2 . Die

Berechnung von W_4 ist complicirter. Jedenfalls kommen aber die h, l, p, q nur in den Verbindungen vor:

$$2) \quad h_\lambda^2 + l_\lambda^2, \quad h_\lambda h_\mu + l_\lambda l_\mu, \quad p_\lambda^2 + q_\lambda^2, \quad p_\lambda p_\mu + q_\lambda q_\mu, \\ h_\lambda p_\lambda + l_\lambda q_\lambda, \quad h_\lambda p_\mu + l_\lambda q_\mu,$$

und zwar so, dass jedes Glied sowohl in Bezug auf die h und l , als auch in Bezug auf die p und q gerade ist. Man kann sich also W_4 vorstellen als homogene quadratische Form der in 2) angegebenen Verbindungen, jedoch so, dass niemals eine der vier ersten Verbindungen mit einer der beiden letzten multiplicirt wird.

An die Stelle der Gleichungen 3) treten jetzt, wenn man die rechte Seite bis zum dritten Grad inclusive entwickelt, folgende:

$$3) \quad \left\{ \begin{aligned} m \sqrt{\mu a} \cdot \frac{dh}{dt} &= \frac{\partial W_2}{\partial l} + \left[-\frac{h^2 + l^2}{2} \cdot \frac{\partial W_2}{\partial l} \right. \\ &\quad \left. + \frac{l}{2} \left(p \frac{\partial W_2}{\partial p} + q \frac{\partial W_2}{\partial q} \right) + \frac{\partial W_4}{\partial l} \right], \\ m \sqrt{\mu a} \cdot \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial W_2}{\partial h} + \left[\frac{h^2 + l^2}{2} \cdot \frac{\partial W_2}{\partial h} \right. \\ &\quad \left. - \frac{h}{2} \left(p \frac{\partial W_2}{\partial p} + q \frac{\partial W_2}{\partial q} \right) - \frac{\partial W_4}{\partial h} \right], \\ m \sqrt{\mu a} \cdot \frac{dp}{dt} &= \frac{\partial W_2}{\partial q} + \left[\frac{h^2 + l^2 - p^2 - q^2}{2} \cdot \frac{\partial W_2}{\partial q} \right. \\ &\quad \left. - \frac{p}{2} \left(l \frac{\partial W_2}{\partial h} - h \frac{\partial W_2}{\partial l} \right) + \frac{\partial W_4}{\partial q} \right], \\ m \sqrt{\mu a} \cdot \frac{dq}{dt} &= -\frac{\partial W_2}{\partial p} + \left[\frac{p^2 + q^2 - h^2 - l^2}{2} \cdot \frac{\partial W_2}{\partial p} \right. \\ &\quad \left. - \frac{q}{2} \left(l \frac{\partial W_2}{\partial h} - h \frac{\partial W_2}{\partial l} \right) - \frac{\partial W_4}{\partial p} \right]. \end{aligned} \right.$$

Es handelt sich nun darum, diese Gleichungen, welche man für jeden Planeten aufzustellen hat, zu integriren, wenn auch nur angenähert. Wären die Grössen innerhalb der eckigen Klammern gleich Null, so würden die h, l, p, q die in § 31 angegebene Form besitzen. Wir wollen nun unter Anwendung LAGRANGE'scher Principien auch jetzt noch dieselbe Form beibehalten, nur mit dem Unterschied, dass die K, δ, K', δ' nicht mehr Constante, sondern noch näher zu bestimmende Functionen von t bedeuten sollen. (Die α und g , sowie β und γ in den Gleichungen 29) und 45), § 31, bleiben natürlich unver-

änderlich, da sie keine Integrationsconstante sind und von den unveränderlichen Achsen abhängen.)

Setzt man:

$$4) \quad G_\lambda = g_\lambda t + \delta_\lambda, \quad \Gamma_\lambda = \gamma_\lambda t + \delta'_\lambda,$$

so wird nach § 31:

$$5) \quad W_2 = \frac{1}{2} (g_1 K_1^2 + g_2 K_2^2 + g_3 K_3^2 + \dots) \\ + \frac{1}{2} (\gamma_1 K_1'^2 + \gamma_2 K_2'^2 + \gamma_3 K_3'^2 + \dots).$$

Ferner wird W_4 von der Form:

$$6) \quad W_4 = k_0 + \Sigma k \cos \lambda,$$

wo die Coefficienten k homogene Functionen vierten Grades der K bedeuten und die Winkel λ folgende Form besitzen:

$$7) \quad \lambda = a_1 G_1 + a_2 G_2 + \dots + b_1 \Gamma_1 + b_2 \Gamma_2 + \dots$$

Es sind hier die a und b positive oder negative ganze Zahlen, die Null mit eingeschlossen, welche den Bedingungen genügen:

$$8) \quad a_1 + a_2 + \dots + b_1 + b_2 + \dots = 0,$$

$$9) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n = \text{einer geraden Zahl.}$$

$$10) \quad [a_1] + [a_2] + \dots + [b_1] + [b_2] + \dots = 4, \text{ oder } 2, \text{ oder } 0.$$

Bezeichnet man die in 3) angegebenen in die eckigen Klammern eingeschlossenen Ausdrücke kurz mit:

$$11) \quad [H], [L], [P], [Q],$$

so erhält man durch Substitution von 29) und 45), § 31, folgende Entwicklungen:

$$12) \quad [H] = \Sigma k \cos \lambda,$$

wo die k hier homogene Functionen dritten Grades der K bedeuten und die λ Winkel der Form 7) sind, nur dass die rechte Seite von 8) $= 1$, die Summe 9) ungerade und die Summe 10) $= 3$ oder $= 1$ werden muss.

Ebenso folgt:

$$13) \quad [L] = - \Sigma k \sin \lambda,$$

wo die k und λ genau dieselben Werthe haben wie 12):

Endlich ergibt sich:

$$P = \Sigma k' \cos \lambda', \quad Q = - \Sigma k' \sin \lambda',$$

wo die k' ebenfalls homogene Functionen dritten Grades der K bedeuten und die Winkel λ' auch von der Form 7) sind, nur dass die rechte Seite von 8) $= 1$ wird, die Gleichung 9) unverändert bleibt, während die rechte Seite von 10) $= 3$ oder $= 1$ wird.

Die Gleichungen 34), § 31, werden hier:

$$14) \quad K_\lambda \sin G_\lambda = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \alpha_{\mu,\lambda} \sqrt{m_\mu} \sqrt{\rho_\mu a_\mu} \cdot h_\mu,$$

$$15) \quad K_\lambda \cos G_\lambda = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \alpha_{\mu,\lambda} \sqrt{m_\mu} \sqrt{\rho_\mu a_\mu} \cdot l_\mu,$$

Differentiirt man diese Gleichungen unter Berücksichtigung, dass die K und δ variabel sind, so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dK_\lambda}{dt} \sin G_\lambda + K_\lambda \cos G_\lambda \frac{d\delta_\lambda}{dt} + g_\lambda K_\lambda \cdot \cos G_\lambda \\ = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \alpha_{\mu,\lambda} \sqrt{m_\mu} \sqrt{\rho_\mu a_\mu} \cdot \frac{dh_\mu}{dt}. \end{aligned}$$

Setzt man nun für $\frac{dh_\mu}{dt}$ seinen Werth aus 3) ein und berücksichtigt, dass das Glied $g_\lambda K_\lambda \cos G_\lambda$ links sich nach § 31 gegen das rechts entstehende Glied zweiten Grades $\sum_{\mu} \frac{\alpha_{\mu,\lambda}}{\sqrt{m_\mu} \sqrt{\rho_\mu a_\mu}} \cdot \frac{\partial W_2}{\partial l_\mu}$ heben muss, so verwandelt sich die vorige Gleichung in:

$$\frac{dK_\lambda}{dt} \cdot \sin G_\lambda + K_\lambda \cos G_\lambda \cdot \frac{d\delta_\lambda}{dt} = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{\alpha_{\mu,\lambda}}{\sqrt{m_\mu} \sqrt{\rho_\mu a_\mu}} \cdot [H_\mu],$$

Ebenso folgt:

$$\frac{dK_\lambda}{dt} \cdot \cos G_\lambda - K_\lambda \sin G_\lambda \cdot \frac{d\delta_\lambda}{dt} = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{\alpha_{\mu,\lambda}}{\sqrt{m_\mu} \sqrt{\rho_\mu a_\mu}} \cdot [L_\mu],$$

und also:

$$16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dK_\lambda}{dt} = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{\alpha_{\mu,\lambda}}{\sqrt{m_\mu} \sqrt{\rho_\mu a_\mu}} \cdot ([H_\mu] \sin G_\lambda + [L_\mu] \cos G_\lambda) \\ \text{und} \\ K_\lambda \frac{d\delta_\lambda}{dt} = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{\alpha_{\mu,\lambda}}{\sqrt{m_\mu} \sqrt{\rho_\mu a_\mu}} \cdot ([H_\mu] \cos G_\lambda - [L_\mu] \sin G_\lambda). \end{array} \right.$$

Setzt man für die $[H]$ und $[L]$ ihre Werthe aus 12) und 13), so erhalten die rechten Seiten dieser Gleichungen die Gestalt:

$$\Sigma k \sin \lambda, \quad \Sigma k \cos \lambda,$$

wo die k wieder homogene Functionen dritten Grades der K und K'

sind und zwar vom geraden Grade in Bezug auf die K' und ferner λ wieder Winkel von der Form 7) bedeuten.

Entsprechend leitet man die Gleichungen ab:

$$17) \left\{ \begin{aligned} \frac{dK'_\lambda}{dt} &= \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{\beta_{\mu,\lambda}}{\sqrt{m_\mu} \sqrt{\mu_\mu a_\mu}} \cdot ([P_\mu] \sin \Gamma_\lambda + [Q_\mu] \cos \Gamma_\lambda), \\ K'_\lambda \frac{d\delta'_\lambda}{dt} &= \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{\beta_{\mu,\lambda}}{\sqrt{m_\mu} \sqrt{\mu_\mu a_\mu}} \cdot ([P_\mu] \cos \Gamma_\lambda - [Q_\mu] \sin \Gamma_\lambda), \end{aligned} \right.$$

und die rechten Seiten werden hier ebenfalls von der Form:

$$18) \quad \Sigma k \sin \lambda, \quad \Sigma k \cos \lambda.$$

Um diese Gleichungen 16) und 17) angenähert zu integrieren, unterscheide man wieder in ihren rechten Seiten die — so zu sagen — säcular säcularen, d. h. die von den G und Γ unabhängigen Glieder von den säcular periodischen, d. h. den Gliedern, welche die G und Γ enthalten. Da die $\frac{dK}{dt}$ und $\frac{dK'}{dt}$ von der Form $\Sigma k \sin \lambda$ sind, und also hier die säcular säcularen Glieder fehlen, so folgt unter Beschränkung auf diese sofort:

$$\frac{dK}{dt} = 0, \quad \frac{dK'}{dt} = 0.$$

D. h.: Die früheren Integrationsconstanten K und K' bleiben constant wie zuvor.

Anders ist es mit den Differentialquotienten der δ und δ' . Wählt man in 18) das Glied, für welches $\lambda = 0$ wird und bezeichnet die zugehörigen Coefficienten mit k_0 , resp. k'_0 , so folgt:

$$\begin{aligned} K_\lambda \frac{d\delta_\lambda}{dt} &= k_0, \\ K_\lambda \frac{d\delta'_\lambda}{dt} &= k'_0. \end{aligned}$$

Die k_0 und k'_0 sind homogene und ganze Functionen dritten Grades der K und K' , also nach Obigem constant.

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \delta_\lambda &= \frac{k_0}{K_\lambda} t + \varepsilon_\lambda, \\ \delta'_\lambda &= \frac{k'_0}{K_\lambda} t + \varepsilon'_\lambda. \end{aligned}$$

D. h.: Die früheren Constanten δ_λ und δ'_λ werden lineare Functionen der Zeit.

Setzt man noch:

$$19) \quad \frac{k_0}{K_\lambda} = \delta g_\lambda, \quad \frac{k'_0}{K_\lambda} = \delta \gamma_\lambda,$$

so werden mithin die Winkel G_λ und Γ_λ von der Form:

$$20) \quad G_\lambda = (g_\lambda + \delta g_\lambda)t + \varepsilon_\lambda = g'_\lambda t + \varepsilon_\lambda,$$

$$21) \quad \Gamma_\lambda = (\gamma_\lambda + \delta \gamma_\lambda)t + \varepsilon'_\lambda = \gamma'_\lambda t + \varepsilon'_\lambda.$$

D. h. die Winkel G_λ und Γ_λ bleiben noch lineare Functionen der Zeit, dagegen sind die Coefficienten, mit denen diese Zeit t behaftet ist, nicht mehr die alten durch die Gleichungen 21) und 42), § 31, bestimmten g und γ , sondern es treten zu ihnen noch kleine Grössen δg resp. $\delta \gamma$ hinzu, welche in Bezug auf die Excentricitäten und Neigungen von der zweiten Ordnung sind.

Um nun die säcular periodischen Glieder zu berücksichtigen, verfähre man genau nach den Principien des § 29. Man setze also in irgend ein solches Glied $k \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda}$ für die K, K', G, Γ ihre säcular säcularen Werthe ein und integriere. Auf diese Weise entstehen in K und K' Glieder von der Form:

$$22) \quad - \frac{k \cos \lambda}{a_1 g'_1 + a_2 g'_2 + \dots + b_1 \gamma'_1 + b_2 \gamma'_2 \dots},$$

während die entsprechenden Glieder in δ und δ' lauten:

$$23) \quad + \frac{k}{K} \cdot \frac{\sin \lambda}{a_1 g'_1 + a_2 g'_2 + \dots + b_1 \gamma'_1 + b_2 \gamma'_2 \dots}.$$

Somit sehen wir, dass die Wirkung der säcularen Glieder höheren Grades sich in zwei Dingen zu erkennen giebt.

Erstens werden die Perioden der säcularen Winkel G und Γ um kleine, den Quadraten der Excentricitäten und Neigungen proportionale Beträge verändert.

Zweitens treten zu den ursprünglichen säcularen Gliedern in den h, l, p, q noch Zusatzglieder hinzu, deren Argumente lineare Verbindungen der ursprünglichen Argumente mit ganzen Coefficienten sind.

Allerdings tritt hier ein Umstand auf, der ohne Weiteres gewisse säcular periodische in säcular säculare Glieder überführt. Wir haben gesehen, dass ein γ , z. B. $\gamma_n = 0$ ist. Daher ist auch $\Gamma_n = \delta'_n$ gleich einer Constanten. Die Glieder von 18), für welche $\lambda = 2\gamma_n$

oder $= 4\gamma_n$ ist, sind demnach auch als säcular säculare Glieder anzusehen. Darnach würden also die Gleichungen $\frac{dK}{dt} = 0$, resp. $\frac{dK'}{dt} = 0$ nicht erfüllt sein. Dieser Einwurf ist durchaus berechtigt. In der That sind diese beiden Gleichungen im Allgemeinen nicht richtig, vielmehr muss man als xy Ebene die unveränderliche Ebene wählen, weil dann, wie wir in § 31 sahen, schon in erster Annäherung die von γ_n abhängigen Glieder verschwinden. Bei dieser Wahl des Coordinatensystems tritt aber offenbar auch in $\frac{d\delta_n'}{dt}$ kein säcular säculares Glied auf, so dass auch das neue $\gamma_n' = \gamma_n + \delta\gamma_n'$ verschwindet.

Man kann in derselben Weise weiter gehend noch höhere Glieder in Rechnung ziehen und gelangt dann endlich zu folgender formellen Entwicklung der h , l , p , q . Die h und l haben die Gestalt:

$$24) \quad h = \sum k \sin \lambda, \quad l = \sum k \cos \lambda,$$

wo λ einen Winkel von der Form 7) mit der Bedingungsgleichung:

$$a_1 + a_2 \dots + b_1 + b_2 + \dots = 1$$

vorstellt, die Zahlen a und b aber sonst alle möglichen ganzen Zahlen vorstellen, welche der Bedingung genügen, dass $a_1 + a_2 \dots + a_n$ ungerade ist. (b_n ist in Folge der Annahme, dass die xy Ebene mit der unveränderlichen Ebene zusammenfalle, ausgeschieden.) Ebenso erhält man für die p und q Werthe von derselben Form:

$$25) \quad p = \sum k' \sin \lambda', \quad q = \sum k' \cos \lambda',$$

wo λ' von derselben Form wie λ ist, nur dass die Summe $a_1 + a_2 \dots + a_n$ hier gerade wird. Da die G und Γ lineare Functionen der Zeit sind, findet dasselbe für die λ und λ' statt. Allerdings ist diese Auflösung 24) und 25) nur eine formelle. Es treten nämlich in den Ausdrücken der Coefficienten nach 22) und 23) Nenner auf, die eventuell verschwinden oder wenigstens sehr klein werden könnten. LEVERRIER und LEHMANN haben einige solche Nenner namhaft gemacht und daraus in Verbindung mit numerischen Resultaten den Schluss gezogen, dass der Einfluss der Glieder höherer Ordnung bedeutend grösser ist, als LAGRANGE und LAPLACE angenommen hatten.

Setzt man, diese Schwierigkeiten auf sich beruhen lassend, die Formeln 24) und 25) als vollkommen richtig voraus und fügt zu den Elementen noch die in § 33 angeführten periodischen Glieder, so erhält

man endlich, wenn dies in die Coordinatenausdrücke eingesetzt wird, folgende ganz allgemeine schematische Darstellung der Coordinaten:

$$26) \quad x = \sum K \cos L, \quad y = \sum K \sin L,$$

$$27) \quad z = \sum K' \sin L'.$$

Die K und K' sind von der Zeit unabhängige Coefficienten und die Winkel L sind von folgender Form:

$$28) \quad L = a_1 \zeta_1 + a_2 \zeta_2 + a_3 \zeta_3 + \dots + b_1 G_1 + b_2 G_2 + \dots \\ + c_1 \Gamma_1 + c_2 \Gamma_2 + \dots$$

Die ganzen Zahlen a , b , c genügen den Bedingungen:

$$a_1 + a_2 + \dots + b_1 + b_2 \dots + c_1 + c_2 \dots = 1.$$

Von derselben Form 28) sind auch die L' , nur dass für diese die Summe dieser ganzen Zahlen verschwindet.

Trotz des so sehr verschiedenen Ursprunges der ζ , G und Γ haben diese doch Alle das gemeinsam, dass sie der Zeit proportional wachsen. Mit dieser Darstellung der Coordinaten werden wir uns in § 40 und folgende eingehender beschäftigen.

§ 36.

Die Glieder von langer Periode und die Commensurabilität zweier Umlaufszeiten.

Bei der Trennung der Wirkungen der säcularen und der periodischen Glieder auf die Elemente oder die Coordinaten zeigt sich eine kapitale Schwierigkeit, welche trotz aller Bemühungen der Mathematiker und Astronomen noch nicht ganz überwunden ist. Ist nämlich:

$$1) \quad k \frac{\cos}{\sin} (a_1 \zeta_1 + a_2 \zeta_2)$$

ein periodisches Glied der Störungsfunction, so veranlasst dasselbe nach den Formeln 4), § 33, in den Elementen ähnliche Glieder. In diesen tritt aber der Nenner:

$$2) \quad a_1 n_1 + a_2 n_2$$

auf. In der mittleren Länge erzeugt das Glied 1) überdies das Glied:

$$3) \quad - \frac{3}{a_1^2} \cdot \frac{a_1 k}{(a_1 n_1 + a_2 n_2)^2} \cdot \frac{\sin}{\cos} (a_1 \zeta_1 + a_2 \zeta_2),$$

in welchem sogar das Quadrat dieser Zahl im Nenner enthalten ist.

Diese Nenner bereiten die oben angedeutete Schwierigkeit. Wenn auch n_1 und n_2 irrational zu einander sind, so kann man doch immer

(am besten durch Entwicklung von $\frac{n_1}{n_2}$ in einen Kettenbruch und Bestimmung der Zähler und Nenner der Näherungswerthe) ganze Zahlen so bestimmen, dass die Gleichung:

$$4) \quad a_1 n_1 + a_2 n_2 = 0$$

ausserordentlich angenähert erfüllt wird. Dann werden die periodischen Störungen, welche von dem Gliede 1) abhängen, durch diesen Nenner übermässig vergrössert und wenn der ursprüngliche Coefficient k auch sehr klein sein sollte, so können die entsprechenden Coefficienten in den Störungen doch bedeutende und vielleicht sogar unendlich grosse Werthe erhalten.

Dieser Schwierigkeit pflegt man folgendermaassen zu begegnen. Für unser Planetensystem haben die mittleren täglichen Bewegungen n die Eigenschaft, dass die Gleichung 4) nur für sehr grosse Zahlen a_1 und a_2 angenähert oder genau erfüllt wird. Dann wird aber der Coefficient k des entsprechenden Gliedes der Störungsfunction, welcher in Bezug auf Excentricitäten und Neigungen vom Grade $[a_1 + a_2]$ ist, so ausserordentlich klein, dass dieses Glied für sehr lange Zeiten keinen Einfluss auf die Elemente haben kann.

Wir wollen nun aber annehmen, dass $a_1 n_1 + a_2 n_2$ für nicht zu grosse ganze Zahlen a_1 und a_2 sehr klein wird und die Wirkung des entsprechenden Gliedes 1) der Störungsfunction auf die Störungen genauer untersuchen. Die Periode dieses Gliedes ist:

$$5) \quad T = \frac{2\pi}{a_1 n_1 + a_2 n_2},$$

Zunächst ist zu bemerken, dass sowohl in R_1 , als auch in R_2 ein solches Glied vorkommt und wollen wir die Coefficienten k für beide Störungsfunctionen mit einander vergleichen. Lässt man die übrigen Planeten, die hier nicht in Betracht kommen, aus dem Spiel, so ist:

$$6) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_1 = m_2 \left(\frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} - \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_2^3} \right), \\ R_2 = m_1 \left(\frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} - \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1^3} \right). \end{array} \right.$$

Der Kürze wegen bezeichne man $a_1 \zeta_1 + a_2 \zeta_2$ mit λ . Dann sei das periodische Glied mit dem Argument λ

$$\begin{aligned} \text{in: } & \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} \\ & = P \cos \lambda + Q \sin \lambda, \\ \text{in: } & x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \\ & = p \cos \lambda + q \sin \lambda. \end{aligned}$$

P und Q sind in Bezug auf die Excentricitäten und Neigungen vom Grade $[a_1 + a_2]$, dagegen p und q sogar vom Grade $[a_1] + [a_2] - 2$, so dass, wenn a_1 und a_2 grössere Zahlen vom entgegengesetzten Vorzeichen sind (wie es hier der Fall sein muss, da $a_1 n_1 + a_2 n_2$ klein sein soll), die Coefficienten p und q im Allgemeinen kleiner sind, als P und Q . Nach 16), § 26, werden nun die entsprechenden Glieder:

$$\begin{aligned} \text{in } R_1: & \\ & = m_2 \left[\left(P - \frac{a_2^2 n_2^2}{\mu_2} \cdot p \right) \cdot \cos \lambda + \left(Q - \frac{a_2^2 n_2^2}{\mu_2} q \right) \sin \lambda \right], \\ \text{in } R_2: & \\ & = m_1 \left[\left(P - \frac{a_1^2 n_1^2}{\mu_1} \cdot p \right) \cdot \cos \lambda + \left(Q - \frac{a_1^2 n_1^2}{\mu_1} q \right) \sin \lambda \right]. \end{aligned}$$

Man kann hier ohne Bedenken $\mu_1 = \mu_2 = M$ setzen. Die Factoren von m_2 und von m_1 werden dann nahe einander gleich, denn ihre Differenz ist:

$$= \frac{(a_1 n_1 - a_2 n_2)(a_1 n_1 + a_2 n_2)}{M} \cdot (p \cos \lambda + q \sin \lambda).$$

Nun sind nicht allein die p und q im Verhältniss zu P und Q klein, sondern es soll auch $a_1 n_1 + a_2 n_2$ verhältnissmässig klein ausfallen. Man kann also die obigen Glieder setzen:

$$\begin{aligned} \text{in } R_1: & \\ 7) & = m_2 (P' \cos \lambda + Q' \sin \lambda) = m_2 C \cos (\lambda + \varepsilon), \\ \text{in } R_2: & \\ 8) & = m_1 (P' \cos \lambda + Q' \sin \lambda) = m_1 C \cos (\lambda + \varepsilon). \end{aligned}$$

Die diesen Gliedern entsprechenden periodischen Störungsglieder 3) in den mittleren Längen ζ_1 und ζ_2 sind demnach:

$$\begin{aligned} 9) & \quad - \frac{3}{a_1^2} \cdot \frac{a_1 m_2}{(a_1 n_1 + a_2 n_2)^2} \cdot C \sin (\lambda + \varepsilon) \quad \text{und} \\ 10) & \quad - \frac{3}{a_2^2} \cdot \frac{a_2 m_1}{a_1 n_1 + a_2 n_2} \cdot C \sin (\lambda + \varepsilon). \end{aligned}$$

Das Verhältniss derselben ist:

$$= \frac{a_1 m_2 a_2^2}{a_2 m_1 a_1^2}.$$

Da nun $a_1 n_1 + a_2 n_2$ sehr klein sein soll, so kann man angenähert

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{-n_2}{n_1} = \frac{-\sqrt{a_1^3}}{\sqrt{a_2^3}}$$

setzen, so dass obiges Verhältniss übergeht in:

$$= \frac{m_2 \sqrt{a_2}}{m_1 \sqrt{a_1}}.$$

Es ist also constant und negativ. Wird daher die eine mittlere Länge durch die periodische, von dem Argument λ abhängige Störung vergrössert, so wird die andere verringert. Diese Abweichungen verhalten sich umgekehrt wie die Massen und die Quadratwurzeln aus den grossen Achsen.

Da die Dauer der Periode eine lange ist, so wird ihr Charakter als Periode erst nach einer längeren Reihe von Umläufen um die Sonne durch die Beobachtung sich offenbaren. Es wird scheinen, als ob der eine Umlauf sich beschleunigt, der andere sich verzögert, bis schliesslich sich das Verhältniss umkehrt und die Beschleunigung in eine Verzögerung und die Verzögerung in eine Beschleunigung übergeht.

Diese Erscheinung ist für die Planeten Jupiter und Saturn mit grosser Schärfe verwirklicht. Drückt man die für den Jupiter geltenden Grössen durch den Index 1 und die entsprechenden für Saturn durch den Index 2 aus, so ist hier:

$$5n_2 - 2n_1$$

ein sehr kleiner Bruchtheil von n_1 und n_2 und ungefähr $= \frac{n_2}{30}$.
Der Winkel

$$\lambda = 5\zeta_2 - 2\zeta_1$$

nimmt also nur sehr langsam zu und da die Umlaufszeit Saturns ungefähr 30 Jahre beträgt, so wird λ erst in etwa 900 Jahren um 2π gewachsen, und also das alte Verhältniss zwischen den entsprechenden Störungsgliedern der mittleren Längen hergestellt sein. Da hier $[a_1 + a_2] = 3$ ist, so ist C in 7) und 8) vom dritten Grade in Bezug auf Excentricitäten und Neigungen, also verhältnissmässig klein. Dagegen wachsen in 9) und 10) die Coefficienten durch das Quadrat des kleinen Nenners $5n_2 - 2n_1$ so ausserordentlich an, dass sie nicht allein sehr merklich werden, sondern sogar die grössten sind, welche

überhaupt in den periodischen Störungen unseres Planetensystems auftreten. Die Unregelmässigkeiten, welche diese Störungen in den Umlaufszeiten hervorrufen, sind daher durch Vergleichung der jetzigen Umlaufszeiten mit den aus früheren Beobachtungen abgeleiteten schon frühe aufgefallen. Da man aber gemeint hatte, der Kleinheit der Coefficienten in den Störungsfunctionen wegen die entsprechenden Störungen auch vernachlässigen können zu dürfen, so standen die Astronomen und unter ihnen auch die grossen Denker EULER und LAGRANGE diesen Unregelmässigkeiten rathlos gegenüber. Sie meinten, dass sich hier eine dem NEWTON'schen Gravitationsgesetz fremde Ursache offenbare, bis es LAPLACE gelang, die wirkliche Ursache in dem Auftreten der Quadrate des kleinen Nenners nachzuweisen, dessen Kleinheit ihren Grund in der angenäherten Commensurabilität beider Umlaufszeiten hat.

Wir wollen aber noch weiter gehen und einen Fall untersuchen, der bei der Bewegung der grossen Planeten um die Sonne allerdings nicht verwirklicht ist, dagegen in der Theorie der Drehung des Erdmondes um seine Achse und in der Theorie der Bewegung der Jupitermonde um ihren Planeten unter etwas veränderten Umständen eine grosse Rolle spielt.

Gesetzt nämlich, es seien die Umlaufszeiten zweier Planeten so angenähert commensurabel, dass die Coefficienten der Glieder 9) und 10) in den mittleren Längen eine Grösse erlangen, welche das ganze, auf der Kleinheit der periodischen Störungen und ihrer verhältnissmässig kurzen Dauer beruhende Integrationsverfahren in Frage stellt. Behalten wir die vorigen Bezeichnungen bei, so wird bei Beschränkung auf das Glied 7) bez. 8) der Störungsfunction nach 8), § 28:

$$\frac{dn_1}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{n_1}{a_1} \cdot \frac{da_1}{dt} = \frac{3a_1 \cdot m_2}{a_1^2} \cdot C \sin(\lambda + \varepsilon),$$

$$\frac{dn_2}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{n_2}{a_2} \cdot \frac{da_2}{dt} = \frac{3a_2 \cdot m_1}{a_2^2} \cdot C \sin(\lambda + \varepsilon).$$

Differentiirt man ferner die Formel 11), § 28, total nach t , so ergibt sich:

$$\frac{d^2\zeta_1}{dt^2} = \frac{dn_1}{dt} + k_1, \quad \frac{d^2\zeta_2}{dt^2} = \frac{dn_2}{dt} + k_2,$$

wo k_1 und k_2 in Bezug auf die störenden Massen vom zweiten Grade sind. Unter Vernachlässigung derselben erhält man also (immer unter Beschränkung auf die periodischen von λ abhängigen Glieder der Störungsfunctionen):

$$12) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \zeta_1}{dt^2} = \frac{3 a_1 m_2}{a_1^2} \cdot C \sin (\lambda + \varepsilon), \\ \frac{d^2 \zeta_2}{dt^2} = \frac{3 a_2 m_1}{a_2^2} \cdot C \sin (\lambda + \varepsilon), \end{cases}$$

also, da $\lambda = a_1 \zeta_1 + a_2 \zeta_2$:

$$13) \quad \frac{d^2 \lambda}{dt^2} = 3 \left(\frac{a_1^2 m_2}{a_1^2} + \frac{a_2^2 m_1}{a_2^2} \right) \cdot C \sin (\lambda + \varepsilon).$$

Setzt man noch:

$$14) \quad \lambda + \varepsilon = a_1 \zeta_1 + a_2 \zeta_2 + \varepsilon = V,$$

$$15) \quad - 3 \left(\frac{a_1^2 m_2}{a_1^2} + \frac{a_2^2 m_1}{a_2^2} \right) C = p,$$

und vernachlässigt $\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2}$, welches in Bezug auf die störenden Massen ebenfalls vom zweiten Grade ist, so geht Gleichung 13) über in:

$$16) \quad \frac{d^2 V}{dt^2} = - p \cdot \sin V.$$

p kann man hier immer positiv annehmen, weil im entgegengesetzten Falle nur ε , also auch V , um π vermehrt zu werden braucht.

Die Gleichung 16) ist nicht genau richtig. Vielmehr fehlen rechts noch die übrigen periodischen Glieder und die Glieder vom zweiten Grade in Bezug auf die störenden Massen. Es sind eben nur die von V abhängigen Glieder berücksichtigt worden. Nimmt man noch p , welches nur von den Elementen abhängt und also sich sehr langsam ändert, als constant an, so ist Gleichung 16) genau dieselbe, wie diejenige, von welcher die Schwingung eines ebenen Pendels abhängt.

Gesetzt nun, es sei für einen bestimmten Zeitpunkt $V = 0$. Ist dann $\frac{dV}{dt}$ positiv, so wird V positiv und also nach 16) $\frac{d^2 V}{dt^2}$ negativ.

Daher nimmt $\frac{dV}{dt}$ ab. Ist dagegen $\frac{dV}{dt}$ negativ, so wird V negativ, $\frac{d^2 V}{dt^2}$ also positiv und der absolute Werth von $\frac{dV}{dt}$ nimmt daher ebenfalls ab. Gleichung 19) sagt also aus, dass das Bestreben der beiden Planeten dahin gerichtet ist, das Wachsen von V sowohl nach der positiven, als nach der negativen Seite hin zu verringern.

Nehmen wir den ersteren Fall, dass für $V = 0$ die Geschwindigkeit $\frac{dV}{dt}$ positiv ist. Dann nimmt, während V wächst, $\frac{dV}{dt}$ ab

und V nimmt immer langsamer zu, je grösser es wird. Wird aber $\frac{dV}{dt}$ nicht $= 0$, ist also sein Werth für $V = 0$ zu gross, so nimmt $\frac{dV}{dt}$ nur ab, so lange $V < \pi$ ist. Von da an nimmt V wieder mit beschleunigter Geschwindigkeit von π bis 2π zu u. s. w. Dieser Fall entspricht dem vollständig herumschwingenden Pendel und ist er allein in unserem Planetensystem verwirklicht.

Wird aber $\frac{dV}{dt} = 0$ für einen bestimmten Winkel V_0 , so kehrt von da an V wieder erst langsam und dann schneller zu 0 zurück, um dann negativ zu werden, bis es den Werth $-V_0$ erlangt hat. Dort kehrt es wieder um u. s. w. Das Analogon hierzu ist ein oscillirendes Pendel.

Ist $\frac{dV}{dt}$ zuerst negativ, so gelangt man durch dieselben Betrachtungen zu genau denselben beiden Fällen:

Durch Multiplication von 16) mit $\frac{dV}{dt}$ und Integration folgt:

$$17) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{dV}{dt} \right)^2 = c + p \cos V,$$

$$\frac{dV}{dt} = \sqrt{2c + 2p \cos V}.$$

Ist also c positiv und grösser als p , so wächst V unaufhörlich. Ist aber c negativ oder wenigstens kleiner als p , so wird $\frac{dV}{dt} = 0$ für einen bestimmten Winkel V_0 , der aus der Gleichung zu bestimmen ist:

$$\cos V_0 = -\frac{c}{p}.$$

Nun ist:

$$V = a_1 \zeta_1 + a_2 \zeta_2 + \varepsilon,$$

also bei Unterdrückung von Gliedern, welche vom Grade der störenden Massen sind:

$$\frac{dV}{dt} = a_1 n_1 + a_2 n_2,$$

daher:

$$(a_1 n_1 + a_2 n_2)^2 = 2c + 2p \cos V.$$

Sind nun (n_1) und (n_2) die Werthe von n_1 und n_2 für $V = 0$, so folgt:

$$(a_1(n_1) + a_2(n_2))^2 = 2c + 2p,$$

$$2c = (a_1(n_1) + a_2(n_2))^2 - 2p,$$

und 17) geht über in:

$$\frac{dV}{dt} = \sqrt{(a_1(n_1) + a_2(n_2))^2 - 4p \cdot \sin^2 \frac{V}{2}},$$

wenn also V oscilliren soll, muss:

$$(a_1(n_1) + a_2(n_2))^2 < 4p,$$

also:

$$18) \quad [a_1(n_1) + a_2(n_2)] < 2\sqrt{p}$$

sein. Ist 18) erfüllt, so oscillirt V um 0, also $a_1\zeta_1 + a_2\zeta_2$ um den Werth $-\varepsilon$. Von diesen Oscillationen abgesehen, bleibt also $a_1\zeta_1 + a_2\zeta_2$ constant und folgt daher, wenn man unter $[n_1]$ und $[n_2]$ die mittleren Werthe der täglichen mittleren Bewegungen versteht:

$$19) \quad a_1[n_1] + a_2[n_2] = 0, \quad [n_1] : [n_2] = a_2 : -a_1.$$

Daher erhalten wir das höchst merkwürdige Resultat:

Es mögen zwei Planeten derart um die Sonne kreisen, dass ihre Umlaufszeiten angenähert commensurabel sein würden, wenn nur die Sonne auf sie einwirkte. Ueberschreitet diese Annäherung eine durch die Ungleichung 18) bestimmte Grenze, so hat die gegenseitige Anziehung der beiden Planeten zur Folge, dass die Commensurabilität eine vollständige wird.

Diese Grenze ist für Jupiter und Saturn nicht erreicht. Sie würde aber durch verhältnissmässig geringere Aenderungen der grossen Achsen ihrer Bahnen, wie LAPLACE in der *Mécanique céleste* nachgewiesen, überschritten werden, und würden dann diese beiden grössten Planeten unseres Sonnensystems die merkwürdige Erscheinung bieten, dass der erstere in derselben Zeit fünfmal um die Sonne läuft, in welcher beim letzteren dieser Umlauf erst zweimal stattgefunden.

Man pflegt das Herumschwingen eines Winkels um einen bestimmten Mittelwerth in der Astronomie eine Libration zu nennen. Die ganze Dauer T derselben wird bestimmt durch das vollständige elliptische Integral:

$$T = 4 \int_0^{v_0} \frac{dV}{\sqrt{2c + 2g \cos V}}.$$

Es ist also klar, dass in diesem Falle das von V abhängende Glied der Störungsfunction nicht mehr als ein periodisches angesehen werden darf und dass also sein Einfluss auf die Elemente in ganz anderer Weise sich geltend machen wird, als derjenige der anderen periodischen Glieder. Auch hat LAPLACE darüber Untersuchungen angestellt (wobei er allerdings annimmt, dass der Ausschlagswinkel V_0 nur klein bleibt), welche ergeben, dass sämtliche Elemente an dieser Libration theilnehmen.

Freilich sind die Untersuchungen, welche hier über die vollständige Commensurabilität angestellt wurden, auf Voraussetzungen gegründet, die nicht ganz erfüllt sind. Zunächst sind die nicht von V abhängigen Glieder der Störungsfunction und diejenigen vom höheren Grade in Bezug auf die störenden Massen vernachlässigt worden. Trotzdem sind die Resultate von bleibendem Werth, weil sie zeigen, dass selbst ein hoher Grad von Annäherung an die Commensurabilität zweier Umlaufszeiten keine Gefahren für die Ordnung unseres Planetensystems mit sich zu bringen braucht, sondern im Gegentheil wahrscheinlich zwischen zwei Planeten ein inniges Band knüpft, wie es etwa die vollständige Uebereinstimmung der Umlaufzeit des Mondes um die Erde mit seiner Achsendrehung vorstellt.

§ 37.

Die Genauigkeit der Formeln für die Variation der Elemente.

In den vorigen Paragraphen sind die Elemente $a, e, i, \pi, \Omega, \zeta$ in die Formen gebracht worden:

$$1) \quad \begin{cases} a = [a] + (a), & \pi = [\pi] + (\pi), \\ e = [e] + (e), & \Omega = [\Omega] + (\Omega), \\ i = [i] + (i), & \zeta = [\zeta] + (\zeta). \end{cases}$$

Die ersten Glieder auf den rechten Seiten sind die säcularen Werthe der Elemente und die zweiten sind die periodischen, den störenden Massen proportionalen Glieder. Jedes der letzteren ist von der schon so oft benutzten Form 11), § 27, in welche man statt der Elemente $a, e, \dots$ ihre säcularen Werthe einzusetzen hat. In diesem Sinne werden daher $(a), (e), \dots$ Functionen von $[a], [e], \dots$ und daher die Elemente $a, e, \dots$ ebenfalls Functionen von $[a], [e], \dots$

Die Formeln 1) sind, wie gesagt, nur Annäherungsformeln, so dass den zu erfüllenden Gleichungen 8), § 28, durch Substitution von 1) nicht ganz genügt werden kann. Es werden vielmehr

Unterschiede bleiben, auf welche wir jetzt unser Augenmerk richten wollen.

Differentiirt man 1) unter Berücksichtigung der oben gemachten Bemerkungen, so folgt, wenn man wieder Indices einführt:

$$\begin{aligned}
 & \frac{da_1}{dt} = \frac{d[a_1]}{dt} + \frac{d(a_1)}{dt} \\
 & = \frac{d[a_1]}{dt} + \frac{\partial(a_1)}{\partial[\zeta_1]} \cdot [n_1] + \frac{\partial(a_1)}{\partial[\zeta_2]} \cdot [n_2] + \frac{\partial(a_1)}{\partial[\zeta_3]} \cdot [n_3] + \dots \\
 & + \left\{ \frac{\partial(a_1)}{\partial[a_1]} \cdot \frac{d[a_1]}{dt} + \frac{\partial(a_1)}{\partial[e_1]} \cdot \frac{d[e_1]}{dt} + \dots + \frac{\partial(a_1)}{\partial[\zeta_1]} \cdot \left(\frac{d[\zeta_1]}{dt} - [n_1] \right) \right\} \\
 & + \left\{ \frac{\partial(a_1)}{\partial[a_2]} \cdot \frac{d[a_2]}{dt} + \frac{\partial(a_1)}{\partial[e_2]} \cdot \frac{d[e_2]}{dt} + \dots + \frac{\partial(a_1)}{\partial[\zeta_2]} \cdot \left(\frac{d[\zeta_2]}{dt} - [n_2] \right) \right\} \\
 & + \dots \dots \dots \\
 2) \quad & \frac{de_1}{dt} = \frac{d[e_1]}{dt} + \frac{\partial(e_1)}{\partial[\zeta_1]} \cdot [n_1] + \frac{\partial(e_1)}{\partial[\zeta_2]} \cdot [n_2] + \frac{\partial(e_1)}{\partial[\zeta_3]} \cdot [n_3] + \dots \\
 & + \left\{ \frac{\partial(e_1)}{\partial[a_1]} \cdot \frac{d[a_1]}{dt} + \dots \dots \dots + \frac{\partial(e_1)}{\partial[\zeta_1]} \cdot \left(\frac{d[\zeta_1]}{dt} - [n_1] \right) \right\} \\
 & + \left\{ \frac{\partial(e_1)}{\partial[a_2]} \cdot \frac{d[a_2]}{dt} + \dots \dots \dots \right\} \\
 & + \dots \dots \dots \\
 & \frac{d\zeta_1}{dt} - n_1 = \frac{d[\zeta_1]}{dt} - [n_1] - (n_1) + \frac{\partial(\zeta_1)}{\partial[\zeta_1]} \cdot [n_1] + \frac{\partial(\zeta_1)}{\partial[\zeta_2]} \cdot [n_2] + \dots \\
 & + \left\{ \frac{\partial(\zeta_1)}{\partial[a_1]} \cdot \frac{d[a_1]}{dt} + \frac{\partial(\zeta_1)}{\partial[e_1]} \cdot \frac{d[e_1]}{dt} + \dots + \frac{\partial(\zeta_1)}{\partial[\zeta_1]} \cdot \left(\frac{d[\zeta_1]}{dt} - [n_1] \right) \right\} \\
 & + \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Entsprechende Gleichungen gelten für die Differentialquotienten der übrigen Elemente. Betrachten wir nun die rechten Seiten der Gleichungen 2). Man kann zunächst die Summe:

$$3) \quad \frac{d[a_1]}{dt} + \frac{\partial(a_1)}{\partial[\zeta_1]} \cdot [n_1] + \frac{\partial(a_2)}{\partial[\zeta_2]} \cdot [n_2] + \dots$$

in eine sehr einfache Gestalt bringen. Es ist nämlich $\frac{d[a_1]}{dt} = 0$.

Ist ferner $K_{\sin}^{\cos}(a_1 \zeta_1 + a_2 \zeta_2)$ ein Glied von $\frac{da_1}{dt}$, das von einem periodischen Glied von R_1 herrührt, so folgt nach den Principien des § 29 für das entsprechende Glied in (a):

$$\frac{K}{a_1 n_1 + a_2 n_2} \cdot \frac{\sin}{\cos} (a_1 \zeta_1 + a_2 \zeta_2).$$

Demnach wird das entsprechende Glied in: $\frac{\partial a_1}{\partial [\zeta_1]} \cdot [n_1] + \frac{\partial a_1}{\partial [\zeta_2]} \cdot [n_2]$

wieder gleich $K \frac{\cos}{\sin} (a_1 \zeta_1 + a_2 \zeta_2)$. Der Ausdruck 3) ist daher gleich der rechten Seite der ersten Gleichung 8), § 28, wenn man statt der Elemente ihre säcularen Werthe setzt. Dies soll so verstanden werden:

Die Störungsfunction R_1 sei ausgedrückt durch die Elemente $a_1, e_1, \dots, a_2, e_2, \dots$, also:

$$4) \quad R = R(a_1, e_1, \dots, a_2, e_2, \dots).$$

Setzt man hier für die Elemente ihre Werthe 1) ein, so wird:

$$5) \quad R = R([a_1] + (a_1), \dots, [a_2] + (a_2), \dots).$$

Jetzt sollen aber statt der Elemente nur ihre säcularen Werthe eingesetzt werden. Bezeichnet man das Resultat dieser Substitution mit $\bar{R}$, so wird also:

$$6) \quad \bar{R} = R([a_1], [e_1], \dots, [a_2], [e_2], \dots).$$

Demnach wird der Ausdruck 3):

$$= 2 \sqrt{\frac{[a_1]}{\mu_1}} \cdot \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial [\zeta_1]}.$$

Untersucht man ferner die übrigen Glieder auf der rechten Seite der ersten Gleichung 2), so findet man, dass sie sämmtlich in Bezug auf die störenden Massen vom zweiten Grade sind, weil jedes von ihnen ein Product von zwei den störenden Massen proportionalen Factoren bildet. Da ausserdem der erste Factor rein periodisch und der andere Factor rein säcular ist, so ist ihr Product rein periodisch. Bezeichnet man die Summe aller dieser periodischen Glieder mit $\{\{a\}\}$, setzt also:

$$\begin{aligned} 7) \quad \{\{a_1\}\} &= \frac{\partial(a_1)}{\partial [a_1]} \cdot \frac{d[a_1]}{dt} + \frac{\partial(a_1)}{\partial [e_1]} \cdot \frac{d[e_1]}{dt} + \dots \\ &\quad + \frac{\partial(a_1)}{\partial [\zeta_1]} \cdot \left(\frac{d[\zeta_1]}{dt} - [n_1] \right) \\ &\quad + \frac{\partial(a_1)}{\partial [a_2]} \cdot \frac{d[a_2]}{dt} + \dots \\ &\quad + \frac{\partial(a_1)}{\partial [\zeta_2]} \cdot \left(\frac{d[\zeta_2]}{dt} - [n_2] \right), \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

so geht die erste Gleichung 2) über in:

$$8) \quad \frac{da_1}{dt} = 2 \sqrt{\frac{[a_1]}{\mu}} \cdot \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial [\zeta_1]} + \{\{a_1\}\}.$$

Ebenso folgt:

$$9) \quad \frac{de_1}{dt} = - \frac{\sqrt{1 - [e_1]^2} \cdot (1 - \sqrt{1 - [e_1]^2})}{[e_1] \cdot \sqrt{[a_1] \mu_1}} \cdot \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial [\zeta_1]} \\ - \frac{1}{[e_1]} \cdot \sqrt{\frac{1 - [e_1]^2}{[a_1] \mu_1}} \cdot \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial [\pi_1]} + \{\{e_1\}\},$$

wo $\{\{e_1\}\}$ aus 7) durch Vertauschung von (a_1) mit (e_1) hervorgeht.

Wir wollen jetzt die Werthe 1) in die rechten Seiten der Gleichungen 8), § 28), einsetzen:

Es wird:

$$2 \sqrt{\frac{a_1}{\mu_1}} \cdot \frac{\partial R_1}{\partial \zeta_1} = 2 \sqrt{\frac{[a_1] + (a_1)}{\mu_1}} \cdot \frac{\partial R_1([a_1] + (a_1), \dots, [a_2] + (a_2), \dots)}{\partial ([\zeta_1] + (\zeta_1))}.$$

Die periodischen Glieder (a_1) , (e_1) , . . . sind von der Ordnung der störenden Massen. Entwickelt man die rechte Seite nach steigenden Potenzen von (a_1) , (e_1) , . . . und beschränkt sich auf den ersten Grad, so wird:

$$2 \sqrt{\frac{a_1}{\mu_1}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \zeta_1} = 2 \sqrt{\frac{[a_1]}{\mu_1}} \cdot \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial [\zeta_1]} + \frac{(a_1)}{\sqrt{\mu_1 [a_1]}} \cdot \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial [\zeta_1]} \\ + 2 \sqrt{\frac{[a_1]}{\mu}} \left(\frac{\partial^2 \bar{R}_1}{\partial [\zeta_1] \cdot \partial [a_1]} \cdot (a_1) + \frac{\partial^2 \bar{R}_1}{\partial [\zeta_1] \cdot \partial [e_1]} \cdot (e_1) \dots \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 \bar{R}_1}{\partial [\zeta_1] \cdot \partial [a_2]} \cdot (a_2) + \dots \right).$$

Setzt man also der Kürze wegen:

$$10) \quad [\{a_1\}] = \frac{(a_1) \partial \bar{R}_1}{\sqrt{\mu_1 [a_1]} \partial [\zeta_1]} + 2 \sqrt{\frac{[a_1]}{\mu_1}} \left(\frac{\partial^2 \bar{R}_1}{\partial [\zeta_1] \cdot \partial [a_1]} \cdot (a_1) + \dots \right),$$

so wird $[\{a_1\}]$ ebenfalls vom zweiten Grade in Bezug auf die störenden Massen.

Die vorige Gleichung geht daher über in:

$$11) \quad 2 \sqrt{\frac{a_1}{\mu_1}} \cdot \frac{\partial R_1}{\partial \zeta_1} = 2 \sqrt{\frac{[a_1]}{\mu_1}} \cdot \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial [\zeta_1]} + [\{a_1\}].$$

Macht man also die Substitution 1) in die linke Seite der ersten Gleichung 8), § 28, so erhält man das Resultat 8), macht man sie

aber in die rechte Seite derselben Gleichung, so erhält man das Resultat 11). Der Unterschied beider Seiten wird demnach:

$$= \{\{a_1\}\} - [\{a_1\}]$$

und also in Bezug auf die störenden Massen vom zweiten Grade.

Ebenso beweist man auch, dass der Unterschied der beiden Seiten der übrigen Gleichungen 8), § 28 (wobei anstatt der dritten Gleichung die Gleichung 11), § 28, zu setzen ist) ebenfalls vom zweiten Grade in Bezug auf die störenden Massen wird. Diese Unterschiede sind daher im Allgemeinen sehr klein und ist damit die Genauigkeit der Formeln 1) dargelegt. Da aber ein sehr kleines Glied in einer Differentialgleichung durch die Integration schliesslich doch nach einiger Zeit einen merklichen Einfluss gewinnen kann, so wollen wir in den nächsten Paragraphen uns damit beschäftigen, diesen Einfluss aufzusuchen.

§ 38.

Die Vervollständigung der Theorie der Variation der Constanten durch Berücksichtigung der von den zweiten Potenzen der Massen abhängenden Glieder.

In den vorigen Paragraphen sind die Elemente und Coordinaten durch die Zeit t und $6n$ willkürliche Constante ausgedrückt worden. Diese letzteren sind:

- 1) {
 1. die n säcularen Werthe der grossen Achsen,
 2. die $2n$ willkürlichen Winkel δ und δ' in den säcularen Argumenten G und Γ ,
 3. die $2n$ willkürlichen Factoren K und K' in den Ausdrücken der Excentricitäten und Neigungen,
 4. die n willkürlichen Winkel ε in den mittleren Längen ζ .

Diese Ausdrücke für die Elemente genügen nicht ganz den Gleichungen 8), § 28, vielmehr bleiben Differenzen übrig, die nach dem vorigen Paragraphen in Bezug auf die Massen vom zweiten Grade sind. Um diese Differenzen auszugleichen, wendet man am besten wieder die Methode der Variation der Constanten an. Man betrachte also die in 1) angegebenen Grössen nicht als Constante, sondern als näher zu bestimmende Functionen der Zeit, deren Bestimmung so zu erfolgen hat, dass die Einsetzung dieser Functionen in die Ausdrücke für die Elemente die Gleichungen 8), § 28, zu identischen macht. So soll z. B. sein:

$$2) \quad \frac{da_1}{dt} - 2 \sqrt{\frac{a_1}{\mu_1}} \cdot \frac{\partial R_1}{\partial \zeta_1} = 0,$$

wobei bei der Bildung von $\frac{da_1}{dt}$ zu berücksichtigen ist, dass a_1 nicht allein explicite die Zeit t enthält, sondern auch implicite, insofern als die in 1) aufgeführten ehemaligen Constanten und jetzigen Functionen der Zeit in a_1 auftreten. Bezeichnet man nun den partiellen Differentialquotienten von a_1 nach t , wie es explicite in a_1 enthalten ist, mit $\frac{\partial a_1}{\partial t}$, so ist nach dem vorigen Paragraphen:

$$3) \quad \frac{\partial a_1}{\partial t} - 2 \sqrt{\frac{a_1}{\mu_1}} \cdot \frac{\partial R_1}{\partial \zeta_1} = \{\{a_1\}\} - [\{a_1\}].$$

Durch Subtraction von 2) und 3) folgt:

$$4) \quad \frac{da_1}{dt} - \frac{\partial a_1}{\partial t} = \{\{a_1\}\} - [\{a_1\}].$$

Ebenso folgt:

$$5) \quad \frac{de_1}{dt} - \frac{\partial e_1}{\partial t} = \{\{e_1\}\} - [\{e_1\}]$$

u. s. w.

Die rechten Seiten dieser Gleichungen sind Functionen von t und von den in 1) angegebenen Variablen. Die linken Seiten enthalten den Theil von $\frac{da}{dt}$, $\frac{de}{dt} \dots$, welcher bleibt, wenn man den expliciten Differentialquotienten nach t weglässt und also nur die Grössen 1) variirt. Aus den $6n$ Gleichungen 4) und 5) kann man darauf die Differentialquotienten der Grössen 1) berechnen. Jedoch kann man mit grosser Annäherung in 4) und 5) in die linken Seiten statt der Elemente ihre säcularen Werthe setzen. Die erste Gleichung 4) z. B. kann nach 1), § 37, geschrieben werden:

$$\frac{d[a_1]}{dt} - \frac{\partial[a_1]}{\partial t} + \frac{d(a_1)}{dt} - \frac{\partial(a_1)}{\partial t} = \{\{a_1\}\} - [\{a_1\}].$$

Nun ist (a_1) vom ersten Grade der störenden Massen und daher $\frac{d(a_1)}{dt} - \frac{\partial(a_1)}{\partial t}$ vom dritten Grade der störenden Massen, da die Differentialquotienten der ehemaligen Constanten 1) nach 4) und 5) offenbar vom zweiten Grade sind. Mit Vernachlässigung der Glieder dritten Grades erhält man also:

$$6) \quad \frac{d[a_1]}{dt} - \frac{\partial[a_1]}{\partial t} = \{\{a_1\}\} - [\{a_1\}],$$

und ebenso:

$$7) \quad \frac{d[e_1]}{dt} - \frac{\partial[e_1]}{\partial t} = \{\{e_1\}\} - [\{e_1\}]$$

u. s. w.

Die Gleichung 6) ist direkt in der Gestalt, dass sie den Differentialquotienten einer ehemaligen Constanten, nämlich $[a_1]$ ergibt.

Es ist $\frac{\partial[a_1]}{\partial t} = 0$ und daher:

$$8) \quad \frac{d[a_1]}{dt} = \{\{a_1\}\} - [\{a_1\}].$$

Bezeichnet man ferner die in 1) angegebenen Grössen der Reihe nach mit $p_1, p_2, \dots p_{6n}$, so wird:

$$\frac{d[e_1]}{dt} - \frac{\partial[e_1]}{\partial t} = \frac{\partial[e_1]}{\partial p_1} \cdot \frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial[e_1]}{\partial p_2} \cdot \frac{dp_2}{dt} + \dots + \frac{\partial[e_1]}{\partial p_{6n}} \cdot \frac{dp_{6n}}{dt}$$

.

und 7) geht also über in:

$$9) \quad \frac{\partial[e_1]}{\partial p_1} \cdot \frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial[e_1]}{\partial p_2} \cdot \frac{dp_2}{dt} + \dots$$

$$+ \frac{\partial[e_1]}{\partial p_{6n}} \cdot \frac{dp_{6n}}{dt} = \{\{e_1\}\} - [\{e_1\}] \quad \text{u. s. w.}$$

Aus 9) kann man die Differentialquotienten der p berechnen.

Es wird aber nicht beabsichtigt, hier diese Bestimmung durchzuführen, vielmehr wollen wir uns mit einigen allgemeinen Bemerkungen begnügen. Die Coefficienten $\frac{\partial[e_1]}{\partial p_1}, \frac{\partial[e_1]}{\partial p_2} \dots$ der Gleichungen 9) enthalten nur säculare Glieder. Die $\frac{dp_1}{dt} \dots$ werden also

nur dann säculare Glieder enthalten, wenn solche in $[\{a_1\}], [\{e_1\}] \dots$ vorkommen. (In den $\{\{a_1\}\}$ u. s. w. kommen sie nach dem vorigen Paragraphen bestimmt nicht vor.)

Den Principien des § 29 entsprechend wird man sich auch hier zunächst in den rechten Seiten der Gleichungen 8) und 9) auf die säcularen, also von den ζ unabhängigen Glieder beschränken und die periodischen erst später nach der früher angewendeten Methode in Rechnung ziehen.

Wir werden im nächsten Paragraphen zeigen, dass in $[\{a_1\}]$ keine säcularen Glieder vorkommen, dass also bei Beschränkung auf diese die Gleichung 8) übergeht in:

$$\frac{d[a_1]}{dt} = 0,$$

so dass die ehemaligen Constanten $[a]$ auch jetzt noch Constanten bleiben. Steht dies fest, so kann man die übrigen Gleichungen 8) nach den früheren Methoden angenähert integriren. Ich will mich in die näheren Details nicht einlassen und nur erwähnen, dass die K und K' auch hier constant bleiben, wenn man zu den Excentricitäten und Neigungen noch andere säculare Glieder hinzufügt, deren Argumente ganzzahlige Verbindungen der G und Γ bilden und deren Coefficienten die störenden Massen als Factoren enthalten. Ausserdem werden die g' und γ' um kleine Bruchtheile vermehrt werden, welche ebenfalls von den ersten Potenzen der Massen sind.

§ 39.

Die Unveränderlichkeit der grossen Achsen.

Die Unveränderlichkeit der grossen Achsen, selbst unter Berücksichtigung der in den vorigen Paragraphen angegebenen Glieder vom zweiten Grade in Bezug auf die störenden Massen hat POISSON bewiesen. (Sur les inégalités séculaires des moyens mouvements des planètes. Journal de l'Ecole polytechnique. Tome VIII, 1809, pag. 1 etc.) Im Folgenden ist der LAPLACE'sche Beweis in etwas veränderter Gestalt dargestellt worden.

Nach dem vorigen Paragraphen ist zu beweisen, dass in:

$$1) \quad [\{a_1\}]$$

keine von den mittleren Längen unabhängigen Glieder enthalten sind. Bezeichnet man jetzt, da keine Verwechslung zu befürchten ist, die säcularen Werthe $[a]$, $[e]$, ... einfach mit a , e , und ebenso $\bar{R}$ einfach mit R , so besteht nach 10), § 37, die Grösse $[\{a_1\}]$ aus Gliedern von folgenden drei Formen:

$$2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{I)} \quad (a_1) \cdot \frac{\partial R_1}{\partial \zeta_1}, \\ \text{II)} \quad \frac{\partial^2 R_1}{\partial \zeta_1 \cdot \partial a_1} \cdot (a_1) + \frac{\partial^2 R_1}{\partial \zeta_1 \cdot \partial e_1} \cdot (e_1) + \dots + \frac{\partial^2 R_1}{\partial \zeta_1 \cdot \partial \zeta_1} \cdot (\zeta_1), \\ \text{III)} \quad \frac{\partial^2 R_1}{\partial \zeta_1 \cdot \partial a_2} \cdot (a_2) + \frac{\partial^2 R_1}{\partial \zeta_1 \cdot \partial e_2} \cdot (e_2) + \dots + \frac{\partial^2 R_1}{\partial \zeta_1 \cdot \partial \zeta_2} \cdot (\zeta_2). \end{array} \right.$$

Jedes Glied in 2) ist ein Product aus 2 Factoren. R ist hier in der gewöhnlichen Weise in die Form 49), § 24, entwickelt angenommen. Die (a) , (e) , . . . sind von derselben Form. Multiplicirt man in den Producten Glied für Glied für Glied aus und wendet die Formel an:

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)),$$

so ist sofort klar, dass nur zwei solche Glieder durch ihre Multiplication säculare Glieder ergeben können, welche von demselben Argument:

$$3) \quad \lambda = a_1 \zeta_1 + a_2 \zeta_2$$

abhängen.

Sei also:

$$4) \quad k \sin \lambda + l \cos \lambda$$

das diesem Argument — in welchem nicht beide ganzen Zahlen a_1 und a_2 zugleich Null sein dürfen, weil in (a) . . . nur periodische Glieder enthalten sind — entsprechende Glied in R . Dann hat man nach § 29 die entsprechenden Glieder in (a) , (e) , . . . zu bilden und in 2) einzusetzen.

Nehmen wir erst das Glied I in 2). Das von λ abhängige Glied in (a_1) ist nach 4), § 33:

$$= 2 \sqrt{\frac{a_1}{\mu_1}} \cdot \frac{a_1}{a_1 n_1 + a_2 n_2} \cdot (k \sin \lambda + l \cos \lambda)$$

und in $\frac{\partial R}{\partial \zeta_1}$:

$$a_1 (k \cos \lambda - l \sin \lambda).$$

Durch Multiplication folgt demnach in I das Glied:

$$2 \sqrt{\frac{a_1}{\mu_1}} \cdot \frac{a_1^2}{a_1 n_1 + a_2 n_2} \cdot \left(\frac{k^2 - l^2}{2} \cdot \sin 2\lambda + kl \cos 2\lambda \right),$$

welches rein periodisch ist.

Nehmen wir ferner die Summe II. Lässt man in dem Ausdruck für (ζ) den ersten Term:

$$- \frac{3}{a_1^2} \cdot \frac{a_1}{(a_1 n_1 + a_2 n_2)^2} \cdot (-k \cos \lambda + l \sin \lambda)$$

weg, so heben sich in II die Producte der von demselben Argument λ abhängenden Glieder ganz weg. Dagegen giebt dieses Glied durch

Multiplication mit $\frac{\partial^2 R_1}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_1}$ das Product:

$$\frac{3a_1^3}{a_1^2(a_1n_1 + a_2n_2)^2} \cdot (k \sin \lambda + l \cos \lambda) (-k \cos \lambda + l \sin \lambda) \\ = - \frac{3a_1^3}{a_1^2(a_1n_1 + a_2n_2)^2} \cdot \left(\frac{k^2 - l^2}{2} \sin 2\lambda + kl \cos 2\lambda \right),$$

also auch nur ein periodisches Glied.

Etwas schwieriger ist die Behandlung von III.

Da hier R_1 nach den Elementen des Planeten mit dem Index 2) differentiiert wird, so hat man sich in R_1 zu beschränken auf das Glied:

$$m_2 \left(\frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} - \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{r_2^3} \right),$$

und da R_1 ausserdem nach ζ_1 differentiiert wird, also nur solche Werthe von λ in Betracht kommen, welche von ζ_1 abhängig sind, so hat man auch in $(a_2), (e_2) \dots$ sich auf von ζ_1 abhängende Glieder zu beschränken. $(a_2), (e_2) \dots$ entspringen aber aus der Störungsfunction R_2 , in welcher man also nur das Glied auszuwählen hat:

$$m_1 \left(\frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} - \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{r_1^3} \right).$$

Es sei nun:

$$5) \quad \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} = \Sigma(P \sin \lambda + Q \cos \lambda),$$

$$6) \quad x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = \Sigma(p \sin \lambda + q \cos \lambda).$$

Lässt man nun in R_1 und R_2 die Factoren m_1 und m_2 als für die jetzige Betrachtung unwesentlich weg und bezeichnet mit R_1^λ und R_2^λ die von dem Argument λ abhängigen Glieder, so ist nach 7) und 8), § 36:

$$7) \quad R_1^\lambda = \left(P - \frac{a_2^2 n_2^2}{\mu_2} \cdot p \right) \sin \lambda + \left(Q - \frac{a_2^2 n_2^2}{\mu_2} \cdot q \right) \cos \lambda,$$

$$8) \quad R_2^\lambda = \left(P - \frac{a_1^2 n_1^2}{\mu_1} \cdot p \right) \sin \lambda + \left(Q - \frac{a_1^2 n_1^2}{\mu_1} \cdot q \right) \cos \lambda.$$

Wäre $R_1^\lambda = R_2^\lambda$, so würden in III keine säcularen Glieder entstehen. Der Beweis hierfür wird genau so geführt wie ad II. Mithin kann man sich bei der Bildung von $(a_2), (e_2) \dots$ auf die Differenz:

$$9) \quad V^\lambda = R_2^\lambda - R_1^\lambda = - \left(\frac{a_1^2 n_1^2}{\mu_1} - \frac{a_2^2 n_2^2}{\mu_2} \right) (p \sin \lambda + q \cos \lambda)$$

beschränken.

Richten wir zunächst unser Augenmerk auf die Elemente, wie sie in 7) und 9) ausserhalb der Coefficienten P, Q, p, q enthalten sind.

Es treten die Elemente a_1 und a_2 in n_1^2 und n_2^2 auf. Unter Beschränkung auf dieses Vorkommen von a_1 und a_2 in n_1^2 und n_2^2 folgt also in

$\frac{\partial^2 R_1}{\partial \zeta_1 \partial a_2}$ das Glied:

$$10) \quad - \frac{3}{a_2^4} \cdot a_1 \cdot a_2^2 (p \cos \lambda - q \sin \lambda).$$

Das entsprechende Glied in (a_2) ist nach 4), § 33:

$$11) \quad 2 \sqrt{\frac{a_2}{\mu_2}} \cdot \left(\frac{a_1^2 n_1^2}{\mu_1} - \frac{a_2^2 n_2^2}{\mu_2} \right) \cdot \frac{a_2}{(a_1 n_1 + a_2 n_2)} \cdot (p \sin \lambda + q \cos \lambda).$$

Das Product von 10) und 11) giebt nur periodische Glieder.

Ferner hat man zu beachten, dass a_2 in n_2^2 , welches in 9) vorkommt, enthalten ist. Der daraus folgende Theil von (ζ_2) ist nach 5), § 33:

$$= - 2 \sqrt{\frac{a_2}{\mu_2}} \cdot \frac{a_2^2}{(a_1 n_1 + a_2 n_2) a_2^4} \cdot (p \cos \lambda - q \sin \lambda),$$

und giebt das Product desselben mit dem Theil von $\frac{\partial^2 R_1}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2}$:

$$\frac{a_1 \cdot a_2^3 \cdot n_2^2}{\mu_2} \cdot (p \sin \lambda + q \cos \lambda),$$

welcher von dem Glied:

$$- \frac{a_2^2 n_2^2}{\mu_2} \cdot (p \sin \lambda + q \cos \lambda)$$

von R_1 herrührt, ebenfalls nur periodische Glieder.

Somit sehen wir, dass man nur noch folgende Annahmen zu machen hat:

Erstens: R_1^λ beschränkt sich auf $(P \sin \lambda + Q \cos \lambda)$ und V^λ behält seinen Werth 9) bei.

Zweitens: R_1^λ und V^λ beschränken sich beide auf $(p \sin \lambda + q \cos \lambda)$.

Die zweite Annahme liefert nur periodische Glieder, die ganz auf dieselbe Weise folgen wie für II. Somit bleibt bloss noch die erste Annahme zu untersuchen übrig, dass man sich nämlich in R_1 auf das Glied:

$$12) \quad \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} = \Sigma (P \sin \lambda + Q \cos \lambda)$$

und in R_2 auf das Glied:

$$13) \quad \sum \left(\frac{a_1^2 n_1^2}{\mu_1} - \frac{a_2^2 n_2^2}{\mu_2} \right) \cdot (p \sin \lambda + q \cos \lambda) \\ = (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) \left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} \right)$$

zurückzieht.

Der Werth für R_2 kann in eine andere Form gebracht werden. Es ist für die ungestörte Bewegung:

$$R_2 = (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) \left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) \\ = - \frac{x_1 d^2 x_2 + y_1 d^2 y_2 + z_1 d^2 z_2}{\mu_2 dt^2} + \frac{x_2 d^2 x_1 + y_2 d^2 y_1 + z_2 d^2 z_1}{\mu_1 dt^2}.$$

Setzt man hier $\mu_1 = \mu_2$, was erlaubt ist, da ihre Differenz nur von den störenden Massen abhängt, so geht obige Gleichung über in:

$$R_2 = (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) \left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) \\ = - \frac{1}{\mu_1} \cdot \frac{d}{dt} (x_1 x_2' - x_2 x_1' + y_1 y_2' - y_2 y_1' + z_1 z_2' - z_2 z_1').$$

Setzt man daher:

$$14) \quad W = \int R_2 dt,$$

so wird:

$$15) \quad W = - \frac{1}{\mu_1} (x_1 x_2' - x_2 x_1' + y_1 y_2' - y_2 y_1' + z_1 z_2' - z_2 z_1').$$

Dieses Integral der Störungsfunktion hat man in die Ausdrücke für die periodischen Glieder einzuführen. Bezeichnet man wieder wie früher mit (a, a) , (a, e) . . . die Poisson'schen Ausdrücke, so wird:

$$16) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a_2) = (a_2, e_2) \cdot \frac{\partial W}{\partial e_2} + (a_2, \varepsilon_2) \cdot \frac{\partial W}{\partial \zeta_2} + \dots \\ (e_2) = (e_2, a_2) \cdot \frac{\partial W}{\partial a_2} + (e_2, \varepsilon_2) \cdot \frac{\partial W}{\partial \zeta_2} + \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

Endlich folgt nach einer leichten Reduction, die dadurch eingeführt wird, dass n_2 das Element a_2 enthält und dieses n_2 , welches nach 15) in x_2' , y_2' , z_2' auftritt, auch nach a_2 zu differenzieren ist:

$$17) \quad (\zeta_2) = (\varepsilon_2, a_2) \cdot \frac{\partial W}{\partial a_2} + (\varepsilon_2, e_2) \cdot \frac{\partial W}{\partial e_2} + \dots$$

Führt man dies in III ein und setzt der Kürze wegen:

$$18) \quad \frac{\partial R_1}{\partial \zeta_1} = V,$$

so geht der Ausdruck III über in:

$$\begin{aligned}
 19) \quad & (a_2, e_2) \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial a_2} \cdot \frac{\partial W}{\partial e_2} - \frac{\partial V}{\partial e_2} \cdot \frac{\partial W}{\partial a_2} \right) \\
 & + (a_2, \varepsilon_2) \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial a_2} \cdot \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_2} - \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_2} \cdot \frac{\partial W}{\partial a_2} \right) \\
 & + \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck lässt sich, wenn man statt der Elemente wieder die Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten einführt, nach der allgemeinen Formel 2), § 12, umformen in:

$$\begin{aligned}
 20) \quad & \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial W}{\partial x_2'} - \frac{\partial V}{\partial x_2'} \cdot \frac{\partial W}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial W}{\partial y_2'} - \frac{\partial V}{\partial y_2'} \cdot \frac{\partial W}{\partial y_2} \\
 & + \frac{\partial V}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial W}{\partial z_2'} - \frac{\partial V}{\partial z_2'} \cdot \frac{\partial W}{\partial z_2}.
 \end{aligned}$$

Es bleibt also nur noch nachzuweisen, dass in 20) kein säcu-
lares Glied auftritt. Dies geschieht folgendermaassen. Es ist mit Weglassung des Factors μ :

$$\begin{aligned}
 21) \quad & W = x_1 x_2' - x_2 x_1' + y_1 y_2' - y_2 y_1' + z_1 z_2' - z_2 z_1', \\
 & \text{und darnach geht 20) über in:}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 22) \quad & \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot x_1 + \frac{\partial V}{\partial y_2} \cdot y_1 + \frac{\partial V}{\partial z_2} \cdot z_1 \\
 & + \frac{\partial V}{\partial x_2'} \cdot x_1' + \frac{\partial V}{\partial y_2'} \cdot y_1' + \frac{\partial V}{\partial z_2'} \cdot z_1'.
 \end{aligned}$$

Es bleibt nun noch übrig, in 22) die Grösse V aus 18) einzu-
führen. Es ist hier:

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} = \frac{1}{r_{12}},$$

und daher:

$$\begin{aligned}
 23) \quad V = \frac{\partial R_1}{\partial \xi_1} &= \frac{\partial R_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial R_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial R_1}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial \xi_1} \\
 &= \frac{1}{n_1} \left(\frac{\partial R_1}{\partial x_1} \cdot x_1' + \frac{\partial R_1}{\partial y_1} \cdot y_1' + \frac{\partial R_1}{\partial z_1} \cdot z_1' \right).
 \end{aligned}$$

Folglich:

$$\frac{\partial V}{\partial x_2'} = \frac{\partial V}{\partial y_2'} = \frac{\partial V}{\partial z_2'} = 0,$$

und 22) vereinfacht sich in:

$$24) \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot x_1 + \frac{\partial V}{\partial y_2} \cdot y_1 + \frac{\partial V}{\partial z_2} \cdot z_1.$$

Diesen Ausdruck kann man nun so umgestalten, dass das Fehlen säcularer Glieder unmittelbar ersichtlich wird. V ist nämlich nach 23) eine homogene Function — 2^{ten} Grades von $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$, welche ausserdem nur von $(x_1 - x_2), (y_1 - y_2), (z_1 - z_2)$ abhängt. Darum ist:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots$$

und:

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot (x_2 - x_1) + \frac{\partial V}{\partial y_2} \cdot (y_2 - y_1) + \frac{\partial V}{\partial z_2} \cdot (z_2 - z_1) = -2V,$$

also geht 24) über in:

$$25) \quad 2V + \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot x_2 + \frac{\partial V}{\partial y_2} \cdot y_2 + \frac{\partial V}{\partial z_2} \cdot z_2.$$

$V = \frac{\partial R_1}{\partial \zeta_1}$ enthält kein von ζ_1 unabhängiges Glied. Daher kann ein solches Glied auch in 25) nicht auftreten, denn man kann, nachdem für V sein Werth 18) eingesetzt worden, Gleichung 25) sofort schreiben:

$$26) \quad \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(2R_1 + x_2 \cdot \frac{\partial R_1}{\partial x_2} + y_2 \cdot \frac{\partial R_1}{\partial y_2} + z_2 \cdot \frac{\partial R_1}{\partial z_2} \right).$$

Damit ist also der Beweis, dass $\frac{da}{dt}$ kein säculares Glied, selbst bei Berücksichtigung der zweiten Potenzen der störenden Massen enthalten kann, vollständig geliefert, so dass man jetzt mit noch grösserem Nachdruck als in § 30 den Satz hinstellen kann:

Die grossen Achsen bleiben, von periodischen Störungen abgesehen, constant.

§ 40.

Ueber die Form, in welcher die Elemente und die Coordinaten als Functionen der Zeit erscheinen.

In den vorigen Paragraphen sind die Elemente a, h, l, p, q, ζ der Planeten mit Benutzung einer bestimmten Anzahl von Winkeln, die sämmtlich lineare Functionen der Zeit sind, dargestellt worden. Diese Winkel treten in jedem Planeten auf. Sie sind:

- 1) $\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ Die } n \text{ säcularen Werthe } [\zeta_1], [\zeta_2], \dots [\zeta_n] \text{ der mittleren Längen.} \\ 2. \text{ Die } n \text{ Winkel } G_1, G_2, \dots G_n. \\ 3. \text{ Die } (n-1) \text{ Winkel } \Gamma_1, \Gamma_2, \dots \Gamma_{n-1}. \end{array} \right.$

Richten wir nun einmal unser Augenmerk nicht auf die Art und Weise, wie diese Winkel eingeführt wurden (die ζ nämlich durch die erste Annäherung der Ellipsenbewegung und die G und Γ durch die säcularen Störungen), auch nicht darauf, dass die Coefficienten der Zeit in G und Γ ausserordentlich viel kleiner sind als in den ζ , betrachten wir obige Winkel so zu sagen als gleichwerthig und bezeichnen sie in diesem Sinne der Reihe nach mit:

$$2) \quad l_1, l_2, l_3, \dots, l_{3n-1},$$

so ist also jeder Winkel l_λ von der Form:

$$3) \quad l_\lambda = a_\lambda t + b_\lambda,$$

wo a_λ und b_λ constant sind.

Die Coordinaten x werden durch eine unendliche Reihe von folgender Form ausgedrückt:

$$4) \quad x = \sum k \cos (a_1 l_1 + a_2 l_2 + \dots + a_{3n-1} l_{3n-1}),$$

wo die Zahlen $a_1, a_2, \dots$ alle Werthe annehmen können, die der Bedingung genügen:

$$5) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_{3n-1} = 1.$$

Ferner wird:

$$6) \quad y = \sum k \sin (a_1 l_1 + a_2 l_2 + \dots + a_{3n-1} l_{3n-1})$$

mit denselben Coefficienten k .

Endlich wird:

$$7) \quad z = \sum k' \sin (a'_1 l_1 + a'_2 l_2 + \dots + a'_{3n-1} l_{3n-1})$$

wobei aber:

$$8) \quad a'_1 + a'_2 + \dots + a'_{3n-1} = 0.$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass die unveränderliche Ebene als xy Ebene genommen wird. Die k und k' sind Functionen von nur $(3n-1)$ Constanten, nämlich:

$$9) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ den } n \text{ säcularen Werthen der grossen Achsen: } [a_1], [a_2], \dots, \\ 2. \text{ den } n \text{ Integrationsconstanten } K_1, \dots, K_n, \\ 3. \text{ den } (n-1) \text{ Integrationsconstanten } K'_1, \dots, K'_{n-1}. \end{array} \right.$$

Die $(3n-1)$ Coefficienten a_λ in den l werden nach § 31 und § 32 ebenfalls Functionen dieser $3n-1$ Constanten 9). Man kann daher auch rückwärts die Constanten 9) durch die a_λ ausgedrückt sich vorstellen und somit sagen, dass die k Functionen von a_λ sind.

Die b_λ endlich sind zu den l additiv hinzutretende Constante, welche die Coefficienten k gar nicht beeinflussen.

An den Formen 4), 6) und 8) ist es das bemerkenswerthe, dass die Zeit nur in periodischer Form auftritt und dass sämtliche Winkel lineare Functionen der Zeit werden. Es wird damit bewiesen, dass jedes Glied, sofern es nicht überhaupt constant ist, in gleichen Zeitintervallen seinen Werth wieder erlangt und sein Verlauf am besten durch eine regelmässige Wellenlinie wiedergegeben ist. Unser Planetensystem schwingt also um einen Gleichgewichtszustand in der regelmässigsten Weise, nur dass der Einzelschwingungen unzählig viele sind und deren Perioden und Grössen die grösste Mannigfaltigkeit zeigen. Es giebt keinen Anfangszustand, aus welchem es in der Vergangenheit allmählig sich entwickelt hätte und es giebt keinen Endzustand, welchem es in der Zukunft zustrebte.

Eigentlich ist es kaum nöthig, zu erwähnen, dass dies nur insofern Geltung haben kann, als man alle Einflüsse ausschliesst, welche nicht durch die allgemeine Schwere bedingt sind. In der That finden aber solche statt, wenn auch die Zeitdauer der Beobachtung zu gering ist, um mehr als die leisesten Spuren derselben zu erkennen. Es ist nicht schwer, ihre Wirkung zu analysiren; jedoch ist hier von ihnen ganz Abstand genommen worden, weil nur die Bewegungen untersucht werden sollten, wie sie aus dem NEWTON'schen Gravitationsgesetz entspringen.

Jedoch auch unter dieser Beschränkung steht die Thatsache der ewigen Stabilität unseres Planetensystems noch lange nicht auf der Höhe einer durch vollständig strenge mathematische Deduction abgeleiteten Gewissheit. Es ist niemals versäumt worden, die Vernachlässigungen in der Integration der Differentialgleichungen ausdrücklich hervorzuheben und bis jetzt hat noch Niemand bewiesen, dass die allgemeine Form der Ausdrücke mehr bedeutet, als eine für viele Jahrtausende gültige Annäherung, welche allerdings so bedeutend ist, dass sie fast allen Beobachtungen genau entspricht, sofern man nur die eingeführten Integrationsconstanten zweckmässig bestimmt.

Im Gegentheil muss ein Umstand, welcher immer und immer wieder sich geltend macht, vor einem zu frühen Triumph warnen. Derselbe besteht in dem Auftreten jener Nenner, welche durch die Integration der Glieder von der Form $\frac{\sin}{\cos}(\alpha t + \beta)$ hervorgerufen werden. Die geschicktesten Astronomen und Mathematiker haben demselben ihre Sorgfalt zugewendet, aber trotz des grossen Scharfsinnes der in § 36 ausgeführten Untersuchungen von LAPLACE ist er durchaus noch nicht genügend analysirt. Man weiss ja allerdings, dass für unser Planetensystem dieser Nenner nur dann sehr gross

oder unendlich werden kann, wenn der Coefficient des betreffenden Gliedes sehr klein ist. Doch damit werden die principiellen Bedenken, welche neuerdings Herrn Professor Dr. GYLDEN zu Untersuchungen veranlasst haben, keineswegs verdrängt.

Vernachlässigt man nun in den Differentialgleichungen derartige Glieder, so eliminirt man diesen Umstand. Jedoch ist es unzweifelhaft, dass dies im Laufe der Jahrtausende sich rächen muss, um wie viel mehr also, wenn es gilt, eine Form aufzustellen, die in aller Strenge für alle Zeiten richtig sein soll. Der heutigen Sachlage entsprechend kann man daher nur sagen:

Der Zustand des Gleichgewichtes unseres Planetensystems ist durch die ausserordentlichen Anstrengungen der Mathematiker für nach menschlichen Begriffen sehr lange Zeiten, aber nicht für immer erwiesen.

Wie aber, wenn die Form 4—8) für die Coordinaten, die sich als Annäherungsergebniss aus der Theorie der Variation der Elemente unter Benutzung gewisser günstiger Umstände, bestehend in der Kleinheit der störenden Massen und in der Kleinheit der Excentricitäten und Neigungen ergeben hat, wenn diese Form die thatsächlich der Wahrheit entsprechende wäre, wenn sie nicht den Charakter einer Interpolationsformel, sondern den eines mathematischen Gesetzes trüge? Meiner Meinung nach ist diese Frage von der principiellsten Bedeutung, weil durch eine bejahende Antwort den tiefsinnigen Untersuchungen eines LAPLACE und LAGRANGE eine glänzende Rechtfertigung gegeben werden würde. Es ist ihnen der Vorwurf gemacht worden, dass ihre Integrationsmethoden der mathematischen Strenge entbehren, dass sie gewissermaassen ein Gefühl für das ohne Nachtheil zu Vernachlässigende beanspruchen, ein Gefühl, welches trügerisch sein kann, und in der That, wie in § 26 gezeigt, bereits irregeleitet hat. Mancher Mathematiker hat sich durch diesen Umstand abhalten lassen, den Werth ihrer Resultate gebührend zu würdigen. Alle Bedenken aber, welche man anführen kann, haben sie unzweifelhaft selbst am besten empfunden und wenn sie etwas Besseres an Stelle des Guten hätten setzen können, so wäre es gewiss geschehen. Gelingt es nun, die Gesetze, welche sie durch eine allerdings unvollständige Induction entdeckt haben, auf anderem Wege als vollendete Wahrheiten zu beweisen, so gebührt ihnen das grosse Verdienst, von allen beunruhigenden Zweifeln unbeirrt das grosse Problem der Bewegung der Himmelskörper nach dem NEWTON'schen Gravitationsgesetz seiner endgiltigen Lösung entgegengeführt zu haben.

So viel dem Verfasser bekannt, ist dieser andere Weg bis jetzt kaum angebahnt. Zwar hat man gewisse formelle Resultate abgeleitet, auf die Convergenzbetrachtungen ist man aber noch nicht eingegangen.

Wahrscheinlich ist die Form 4—8) eine bedeutend allgemeinere, insofern als sie auch geltend bleibt, wenn nicht die beschränkenden Umstände der Kleinheit der Massen im Verhältniss zu einer Hauptmasse und der Kleinheit der Excentricitäten und Neigungen stattfinden. Es ist von vornherein klar, dass das Ueberwiegen der Masse eines Punktes durchaus keine nothwendige Bedingung für die Stabilität sein kann, wenn man den Begriff der Stabilität so allgemein fasst, wie er früher definirt wurde. Denn versteht man unter Stabilität die Eigenschaft des Systems, dass die Entfernungen der Punkte stets endlich bleiben (also weder Null noch unendlich werden), so kann sie sehr wohl erfüllt sein, wie gross auch die Massen sind, vorausgesetzt, dass die Anfangscoordinaten und Anfangsgeschwindigkeiten passend gewählt werden. Dass man bei dieser allgemeinen Fassung des Problems weder zu der Theorie der absoluten Störungen, noch zu der Theorie der Variation der Elemente seine Zuflucht nehmen kann, ist selbstverständlich. Und so meine ich denn, dass die Form 4—8) eine Richtschnur für die ferneren Forschungen bietet, dass die eben erwähnten beiden Theorien, nachdem sie ihre volle Schuldigkeit gethan haben, später zu verlassen sind und dass das Problem der n Körper ganz selbstständig auf die allgemeine Form der Lösung zu untersuchen ist, ohne die KEPLER'schen Gesetze oder eine „intermediäre Bahn“ als Ausgangspunkt zu wählen.

Dass die Astronomen heute in der That auf dem eben gekennzeichneten Standpunkt angekommen sind, dafür sei als Beweis eine Preisaufgabe angeführt, welche in den Acta mathematica des Jahres 1885 aufgestellt worden ist:

„Es sollen für ein beliebiges System materieller Punkte, die einander nach dem NEWTON'schen Gesetze anziehen, unter der Annahme, dass niemals ein Zusammentreffen zweier Punkte stattfindet, die Coordinaten jedes einzelnen Punktes in unendliche, aus bekannten Functionen der Zeit zusammengesetzte und für einen Zeitraum von unbegrenzter Dauer gleichmässig convergirende Reihen entwickelt werden.“

„Dass die Lösung dieser Aufgabe, durch deren Erledigung unsere Einsicht in den Bau des Weltsystems auf das Wesentlichste würde gefördert werden, nicht nur möglich,

sondern auch mit den uns zu Gebote stehenden analytischen Hilfsmitteln erreichbar sei, dafür spricht die Versicherung LEJEUNE-DIRICHLET's*), der kurz vor seinem Tode einem befreundeten Mathematiker mitgeteilt hat, dass er eine allgemeine Methode zur Integration der Differentialgleichungen der Mechanik entdeckt habe, sowie auch, dass es ihm durch Anwendung dieser Methode gelungen sei, die Stabilität unseres Planetensystems in vollkommen strenger Weise festzustellen. Leider ist uns von diesen Untersuchungen DIRICHLET's ausser der Andeutung, dass zur Auffindung seiner Methode die Theorie der kleinen Schwankungen einen gewissen Anhalt biete, nichts erhalten worden; es darf aber als gewiss angenommen werden, dass sie nicht in schwierigen und verwickelten Rechnungen bestanden haben, sondern in der Durchführung eines einfachen Grundgedankens, den wieder aufzufinden ernster und beharrlicher Forschung wohl gelingen möchte.“

„Sollte indessen die gestellte Aufgabe Schwierigkeiten darbieten, die zur Zeit nicht zu überwinden wären, so könnte der Preis auch ertheilt werden für eine Arbeit, in der irgend ein anderes bedeutendes Problem der Mechanik in der oben angedeuteten Weise vollständig erledigt wird.“

§ 41.

Einige allgemeine, auf die Coefficienten der Entwicklung der Coordinaten in trigonometrische Reihen sich beziehende Formeln.

In § 36, 26) und 27) sind die Coordinaten unter Zugrundelegung der unveränderlichen (oder vielmehr der durch die Sonne gehenden zur unveränderlichen parallelen) Ebene in folgender Form entwickelt worden:

$$1) \left\{ \begin{array}{l} x_{\lambda} = \sum K_{\lambda}(a_1, a_2, \dots, a_{3n-1}) \cos(a_1 l_1 + a_2 l_2 \dots + a_{3n-1} l_{3n-1}) \\ \quad = \sum K_{\lambda} \cos H, \\ y_{\lambda} = \sum K_{\lambda}(a_1, a_2, \dots, a_{3n-1}) \sin(a_1 l_1 + a_2 l_2 \dots + a_{3n-1} l_{3n-1}) \\ \quad = \sum K_{\lambda} \sin H, \\ z_{\lambda} = \sum k_{\lambda}(b_1, b_2, \dots, b_{3n-1}) \sin(b_1 l_1 + b_2 l_2 \dots + b_{3n-1} l_{3n-1}) \\ \quad = \sum k_{\lambda} \sin h. \end{array} \right.$$

*) KUMMER, Gedächtnissrede auf LEJEUNE-DIRICHLET, Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1868, S. 35.

Dabei ist Folgendes zu bemerken:

a) In den beiden ersten Formeln bezieht sich das Summenzeichen Σ auf alle möglichen positiven und negativen ganzen Zahlen $a_1 \dots a_{3n-1}$, welche der Bedingung genügen:

$$2) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_{3n-1} = 1.$$

b) In der letzten Formel gilt für die Zahlen b dasselbe, nur dass:

$$3) \quad b_1 + b_2 + \dots + b_{3n-1} = 0.$$

c) Die $K_\lambda(a_1 \dots a_{3n-1})$ und ebenso die $k_\lambda(b_1, b_2 \dots b_{3n-1})$ sind constante Coefficienten.

d) Jeder Winkel l_λ ist von der Form:

$$4) \quad l_\lambda = \alpha_\lambda t + \beta_\lambda.$$

Um die Coefficienten k_λ eindeutig festzustellen, wollen wir noch annehmen, dass:

$$5) \quad k_\lambda(-b_1, -b_2 \dots -b_{3n-1}) = -k_\lambda(b_1, b_2 \dots b_{3n-1}).$$

Gesetzt, die Formeln 1) seien nicht blosse Annäherungsformeln, als welche sie in den vorigen Paragraphen auftreten, sondern sie seien von mathematischer Strenge. Dann wollen wir ferner annehmen, dass die Reihen 1) bedingungslos convergent seien, dass also die Summen der absoluten Werthe der Coefficienten:

$$6) \quad \Sigma [K_\lambda], \Sigma [k_\lambda]$$

ebenfalls convergiren. Man wird natürlich die Glieder in 1) nach der Grösse der absoluten Werthe der ganzen Zahlen a resp. b ordnen.

Da sämtliche l lineare Functionen der Zeit sind, so gilt dasselbe von den H und h . Es sei:

$$7) \quad H = Nt + \Delta, \quad h = nt + \delta,$$

wo:

$$8) \quad N = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \dots, \quad \Delta = a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2 + \dots$$

$$9) \quad n = b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_2 + \dots, \quad \delta = b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2 + \dots$$

Die Winkel H mögen von jetzt an kurz von der ersten Art, die Winkel h von der zweiten Art heissen.

Differentiirt man in 1) jedes Glied, so entstehen trigonometrische Reihen derselben Form, welche, wie wir annehmen wollen, ebenfalls convergent sind. Dasselbe soll der Fall sein, wenn man beliebig oft differentiirt. Dann folgt:

$$10) \quad x'_\lambda = -\Sigma K_\lambda N \sin H, \quad y'_\lambda = \Sigma K_\lambda N \cos H, \quad z' = \Sigma k_\lambda n \cos h,$$

oder, wenn man setzt:

$$11) \quad \begin{cases} K_\lambda \cdot N = G_\lambda, & k_\lambda \cdot n = g_\lambda, \\ x'_\lambda = - \sum G_\lambda \sin H, & y'_\lambda = \sum G_\lambda \cos H, & z'_\lambda = \sum g_\lambda \cos h. \end{cases}$$

Ebenso ist:

$$12) \quad \begin{aligned} x'' &= - \sum K_\lambda N^2 \cos H, & y'' &= - \sum K_\lambda N^2 \sin H, \\ z'' &= - \sum k_\lambda n^2 \sin h & \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Diese Reihen sollen alle convergent und zwar bedingungslos convergent sein. D. h. die Summe der absoluten Werthe

$$\sum [K_\lambda N^p], \quad \sum [k_\lambda n^p]$$

soll für jeden ganzen Exponenten p convergiren.

Aus 1) folgt:

$$13) \quad r_\lambda^2 = x_\lambda^2 + y_\lambda^2 + z_\lambda^2 = \sum \sum K_\lambda K'_\lambda \cos (H - H') \\ + \sum \sum k_\lambda k'_\lambda \cos (h - h'),$$

wo der oben angebrachte Strich bedeutet, dass K_λ und K'_λ u. s. w. zu irgend zwei Gliedern von 1) gehören und das doppelte Summenzeichen aussagt, dass man sowohl nach den in dem einen Gliede als auch nach den in dem anderen enthaltenen ganzen Zahlen zu summiren hat.

Alle in 13) auftretenden Winkel sind von der zweiten Art, so dass r_λ in der Form entwickelt werden kann:

$$14) \quad \sum k \cos h.$$

Dieselbe Form 14) tritt bei der Entwicklung der Quadrate der Entfernungen der Planeten von einander auf. Eine weitere Voraussetzung, die wir machen wollen, besteht nun darin, dass überhaupt alle positiven und negativen ganzen Potenzen der Entfernungen in trigonometrische Reihen von der Form 14) entwickelt werden können.

Die grossen Achsen der Planeten und die früher mit h , l , p , q bezeichneten Ausdrücke 12), § 28, können ebenfalls in trigonometrische Reihen von den in 1) und 14) angegebenen Formen entwickelt werden und muss man jetzt den Sinn des Ausdruckes „Stabilität“ in der engeren Bedeutung folgendermaassen bestimmen:

1. Für die grossen Achsen überwiegt das constante Glied bedeutend die Summe der Coefficienten der periodischen Glieder.

2. Die Summe der Coefficienten in den trigonometrischen Reihen für die Ausdrücke 12), § 28, ist klein.

Die constanten Winkel β_λ , welche in den l_λ enthalten sind, vertreten $(3n - 1)$ Integrationsconstante. Die Coefficienten α_λ in 4) und die Coefficienten K und k in 1) enthalten nur noch $(3n - 1)$ andere

Integrationsconstante. Dieselben waren in den früheren Paragraphen die säcularen Werthe der grossen Achsen und die Factoren K resp. K' des § 31. Im Ganzen treten also $(6n - 2)$ Integrationsconstanten auf, also zwei weniger, als die vollständige Lösung bei beliebiger Wahl des Coordinatensystems verlangt.

Die Ausdrücke 1) sind unter der Annahme abgeleitet worden, dass der Anfangspunkt des Coordinatensystems mit dem Sonnenmittelpunkt zusammenfällt. Legt man den Anfangspunkt aber, wie es für die folgenden Untersuchungen zweckmässig ist, in den gemeinsamen Schwerpunkt der $n + 1$ Körper (der Sonne und der n Planeten), so werden die neuen Coordinaten lineare Functionen der alten und die Gleichungen 1) bleiben der Form nach vollständig bestehen und gelten für jeden Körper.

In den Gleichungen 1) bezieht sich das Zeichen Σ auf alle ganzen Zahlen a resp. b . Soll eine Summation über die $(n + 1)$ Körper ausgedehnt werden, so möge der deutlichen Unterscheidung wegen das Zeichen S angewendet werden.

Dann ist:

$$15) \quad S m_{\lambda} x_{\lambda} = 0; \quad S m_{\lambda} y_{\lambda} = 0, \quad S m_{\lambda} z_{\lambda} = 0.$$

Dies liefert nach 1) die Relationen:

$$16) \quad S m_{\lambda} K_{\lambda} (a_1, a_2, \dots, a_{3n-1}) = 0, \quad S m_{\lambda} k_{\lambda} (b_1, \dots, b_{3n-1}) = 0,$$

welche für jedes System der Zahlen a , resp. b gelten müssen.

Ferner ist:

$$17) \quad S m_{\lambda} (x_{\lambda} y'_{\lambda} - y_{\lambda} x'_{\lambda}) = \frac{1}{2} S \Sigma \Sigma m_{\lambda} K_{\lambda} K'_{\lambda} (N + N') \cos(H - H').$$

Die linke Seite ist constant. Es müssen also rechts alle periodischen Glieder sich aufheben, wodurch eine neue Reihe von Relationen zwischen den Coefficienten K hergestellt wird. Mithin reducirt sich die rechte Seite auf das constante Glied:

$$18) \quad S m_{\lambda} (x_{\lambda} y'_{\lambda} - y_{\lambda} x'_{\lambda}) = S \Sigma m_{\lambda} K_{\lambda}^2 \cdot N = S \Sigma m_{\lambda} K_{\lambda} \cdot G_{\lambda}.$$

Ferner ergibt sich:

$$19) \quad S m_{\lambda} (y_{\lambda} z'_{\lambda} - z_{\lambda} y'_{\lambda}) = \frac{1}{2} S \Sigma \Sigma m_{\lambda} K_{\lambda} k_{\lambda} (N + n) \sin(H - h),$$

$$20) \quad S m_{\lambda} (z_{\lambda} x'_{\lambda} - x_{\lambda} z'_{\lambda}) = -\frac{1}{2} S \Sigma \Sigma m_{\lambda} K_{\lambda} k_{\lambda} (N + n) \cos(H - h).$$

Die rechten Seiten enthalten nur Glieder erster Art, also keine constanten Glieder. Sie müssen sich daher gegenseitig aufheben. D. h.:

$$21) \quad S m_{\lambda} (y_{\lambda} z'_{\lambda} - z_{\lambda} y'_{\lambda}) = S m_{\lambda} (z_{\lambda} x'_{\lambda} - x_{\lambda} z'_{\lambda}) = 0,$$

wie es sein muss, wenn die xy Ebene die unveränderliche Ebene sein soll.

Wie bereits oben erwähnt, sind in den Ausdrücken 1) dieses Paragraphen $(6n - 2)$ Integrationsconstante enthalten. Die eine Hälfte wird durch die constanten in den l enthaltenen Winkel β , welche in die K , k und α nicht eingehen, gebildet. Die andere Hälfte, welche in den K , k und α auftritt, möge mit:

$$22) \quad c_1, c_2, \dots, c_{3n-1}$$

bezeichnet werden. Nach dem LAGRANGE'schem Theorem 30, § 10, sind dann die Ausdrücke:

$$23) \quad [a_i, a_j] = S m_\lambda \left[\frac{\partial x_\lambda}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial x'_\lambda}{\partial a_j} - \frac{\partial x_\lambda}{\partial a_j} \cdot \frac{\partial x'_\lambda}{\partial a_i} \right. \\ \left. + \frac{\partial y_\lambda}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial y'_\lambda}{\partial a_j} - \frac{\partial y_\lambda}{\partial a_j} \cdot \frac{\partial y'_\lambda}{\partial a_i} \right. \\ \left. + \frac{\partial z_\lambda}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial z'_\lambda}{\partial a_j} - \frac{\partial z_\lambda}{\partial a_j} \cdot \frac{\partial z'_\lambda}{\partial a_i} \right],$$

wo a_i, a_j irgend zwei der obigen $(6n - 2)$ Integrationsconstanten bezeichnen, constant. Dieselben mögen nun nach NEWCOMB entwickelt werden (NEWCOMB: Théorie des perturbations de la lune qui sont dues à l'action des planètes — Journal des Mathématiques pures et appliquées 1871 und: Sur un problème de Mécanique céleste — Comptes rendus 1872, LXXV, pag. 1750).

Führt man die Bezeichnung ein:

$$24) \quad \{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial B}{\partial a_j} - \frac{\partial A}{\partial a_j} \cdot \frac{\partial B}{\partial a_i},$$

so folgt durch Einsetzen von 1) und 11) in 23):

$$25) \quad [a_i, a_j] = S \sum \sum m_\lambda [\{K, G'\} \cdot \sin(H - H') \\ + \{k, g'\} \cdot \sin(h - h')] \\ - S \sum \sum m_\lambda [G' \cdot \{K, H'\} \cdot \cos(H - H') \\ + g' \cdot \{k, h'\} \cdot \cos(h - h')] \\ + S \sum \sum m_\lambda [K \cdot \{H, G'\} \cdot \cos(H - H') \\ + k \cdot \{h, g'\} \cdot \cos(h - h')] \\ + S \sum \sum m_\lambda [K \cdot G' \cdot \{H, H'\} \cdot \sin(H - H') \\ + k \cdot g' \cdot \{h, h'\} \cdot \sin(h - h')].$$

Setzen wir hier:

$$a) \quad a_i = \beta_i, \quad a_j = \beta_j,$$

so bleibt, da die K , k und α von den β unabhängig sind, in 25) nur das letzte Glied. Es wird hier nach 24):

$$\{H, H'\} = a_i \cdot a_j' - a_j \cdot a_i', \quad \{h, h'\} = b_i \cdot b_j' - b_j \cdot b_i'$$

und daher:

$$26) \quad [\beta_i, \beta_j] = S \sum \sum m_\lambda [(a_i \cdot a_j' - a_j \cdot a_i') \cdot K \cdot G' \cdot \sin(H - H') \\ + (b_i \cdot b_j' - b_j \cdot b_i') \cdot k \cdot g' \cdot \sin(h - h')].$$

Dies soll constant sein. Es müssen also alle periodischen Glieder sich gegenseitig zerstören. Ein constantes Glied existirt nicht, daher:

$$27) \quad [\beta_i, \beta_j] = 0.$$

$$b) \quad a_i = \beta_i, \quad a_j = c_j.$$

Es wird:

$$\{H, G'\} = a_i \frac{\partial G'}{\partial c_j}, \quad \{h, g'\} = b_i \frac{\partial g'}{\partial c_j},$$

$$\{K, H'\} = -a_i' \frac{\partial K}{\partial c_j}, \quad \{k, h'\} = -b_i' \frac{\partial k}{\partial c_j},$$

$$\{H, H'\} = t \left(a_i \frac{\partial N'}{\partial c_j} - a_i' \frac{\partial N}{\partial c_j} \right), \quad \{h, h'\} = t \left(b_i \frac{\partial n'}{\partial c_j} - b_i' \frac{\partial n}{\partial c_j} \right).$$

Die übrigen Verbindungen $\{A, B\}$ in 25) verschwinden, also:

$$28) \quad [\beta_i, c_j] = S \sum \sum m_\lambda \left[\left(a_i K \frac{\partial G'}{\partial c_j} + a_i' G' \frac{\partial K}{\partial c_j} \right) \cos(H - H') \right. \\ \left. + \left(b_i k \frac{\partial g'}{\partial c_j} + b_i' g' \frac{\partial k}{\partial c_j} \right) \cos(h - h') \right] \\ + t \cdot S \sum \sum m_\lambda \left[\left(a_i \frac{\partial N'}{\partial c_j} - a_i' \frac{\partial N}{\partial c_j} \right) \cdot K \cdot G' \sin(H - H') \right. \\ \left. + \left(b_i \frac{\partial n'}{\partial c_j} - b_i' \frac{\partial n}{\partial c_j} \right) \cdot k \cdot g' \sin(h - h') \right].$$

Die mit t multiplicirten Glieder müssen, weil $[\beta_i, c_j]$ constant ist, sich aufheben und die übrigen müssen sich auf das constante Glied reduciren, daher:

$$29) \quad [\beta_i, c_j] = S \sum m_\lambda \left(a_i \frac{\partial (K \cdot G)}{\partial c_j} + b_i \frac{\partial (k \cdot g)}{\partial c_j} \right) \\ = \frac{\partial}{\partial c_j} (S \sum m_\lambda (a_i K^2 N + b_i k^2 n)).$$

$$c) \quad a_i = c_i, \quad a_j = c_j.$$

Es wird hier:

$$\begin{aligned}
 30) \quad [c_i, c_j] = & S \sum \sum m_\lambda \left[\left(\frac{\partial K}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial G'}{\partial c_j} - \frac{\partial K}{\partial c_j} \cdot \frac{\partial G'}{\partial c_i} \right) \sin (H - H') \right. \\
 & \left. + \left(\frac{\partial k}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial g'}{\partial c_j} - \frac{\partial k}{\partial c_j} \cdot \frac{\partial g'}{\partial c_i} \right) \sin (h - h') \right] \\
 & + t \cdot S \sum \sum m_\lambda [(K\{N, G'\} - G'\{K, N\}) \cos (H - H') \\
 & + (k\{n, g'\} - g'\{k, n'\}) \cos (h - h')] \\
 & + t^2 \cdot S \sum \sum m_\lambda [K \cdot G'\{N, N'\} \sin (H - H') \\
 & + k g'\{n, n'\} \sin (h - h')].
 \end{aligned}$$

Die periodischen und die mit t und t^2 multiplicirten constanten und periodischen Glieder müssen sich gegenseitig zerstören. Ein wirklich constantes Glied kommt in 30) nicht vor. Also:

$$31) \quad [c_i, c_j] = 0.$$

Der verschwindende Factor des der Zeit t proportionalen Gliedes in 30) ist übrigens:

$$\begin{aligned}
 0 = S \sum m_\lambda \left[\left(\frac{\partial N}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial (KG)}{\partial c_j} - \frac{\partial N}{\partial c_j} \cdot \frac{\partial (KG)}{\partial c_i} \right) \cos (H - H') \right. \\
 \left. + \left(\frac{\partial n}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial (kg)}{\partial c_j} - \frac{\partial n}{\partial c_j} \cdot \frac{\partial (kg)}{\partial c_i} \right) \cos (h - h') \right].
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung nimmt, wenn für N und n ihre Werthe 8) und 9) gesetzt werden und man die Gleichung 29) benutzt, folgende Form an:

$$\begin{aligned}
 32) \quad 0 = & \frac{\partial \alpha_1}{\partial c_i} [\beta_1, c_j] + \frac{\partial \alpha_2}{\partial c_i} [\beta_2, c_j] + \dots + \frac{\partial \alpha_{3n-1}}{\partial c_i} [\beta_{3n-1}, c_j], \\
 & - \frac{\partial \alpha_1}{\partial c_j} [\beta_1, c_i] - \dots - \frac{\partial \alpha_{3n-1}}{\partial c_j} [\beta_{3n-1}, c_i].
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann man zur Ableitung eines merkwürdigen Theorems ableiten. Die c waren bis dahin nicht weiter bestimmt, als dass gesagt wurde, sie sollen in die Constanten K , k und α eingehen. Wenn man will, kann man die $3n - 1$ Grössen α direct als die c betrachten. Man kann aber auch irgend welche $(3n - 1)$ unabhängige Functionen von K , k und α als die c betrachten und empfiehlt es sich, um die Gleichung 29) möglichst einfach zu gestalten:

$$33) \quad c_i = S \sum m_\lambda (a_i K^2 N + b_i k^2 N)$$

zu setzen. Dann wird:

$$34) \quad [\beta_i, c_i] = 1,$$

während alle übrigen LAGRANGE'schen Verbindungen zwischen den β und c verschwinden.

Hat man so nach 33) die Constanten c_i festgestellt, so handelt es sich noch darum, diese Constanten in die K , k und α einzuführen, d. h. diese Coefficienten als Functionen der c_i zu bestimmen. Wir wollen diese Bestimmung nicht vornehmen, sondern nur das oben erwähnte Theorem besprechen. Mit Hilfe von 34) verwandelt sich die Gleichung 32) in:

$$35) \quad \frac{\partial \alpha_j}{\partial c_i} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial c_j}.$$

Diese Gleichung beweist den Satz, dass die α , wenn man sie durch die c ausdrückt, die partiellen Differentialquotienten einer Function Θ nach den c werden. D. h.:

$$36) \quad \alpha_i = \frac{\partial \Theta}{\partial c_i}.$$

Diese Function Θ kann man nun näher bestimmen, allerdings nicht in der gewünschten Form, nämlich ausgedrückt durch die c , sondern durch die α , K und k . Es ist selbstverständlich, dass die α homogene Functionen der c sein müssen. Der Grad dieser Functionen sei p . Auch die K und k müssen homogene Functionen der c werden. Ihr Grad sei q . Dann sind die Coefficienten von x' , y' , z' vom Grade $p + q$ und von x'' , y'' , z'' vom Grade $2p + q$. Andererseits sind die Coefficienten von $x'' = \frac{\partial V}{\partial x}$ u. s. w. vom Grade $q - 3q = -2q$. Somit ist:

$$2p + q = -2q, \quad 2p = -3q.$$

Ferner folgt aus 33), wenn man den Grad links und rechts vergleicht:

$$1 = 2q + p.$$

also:

$$37) \quad p = -3, \quad q = 2.$$

Da nun die α homogene Functionen — 3^{ten} Grades der c sind, so muss Θ vom — 2^{ten} Grade sein. Daher:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial c_1} \cdot c_1 + \frac{\partial \Theta}{\partial c_2} \cdot c_2 + \dots + \frac{\partial \Theta}{\partial c_{3n-1}} \cdot c_{3n-1} = -2\Theta,$$

und nach 36), 33) und 8) und 9):

$$38) \quad -2\Theta = S \sum m_\lambda (K^2 N^2 + k^2 n^2).$$

Die rechte Seite kann man noch in eine merkwürdige Gestalt bringen. Die lebendige Kraft T ist nach 1):

$$39) \quad T = \frac{1}{2} S \sum m_{\lambda} (K.N.K'.N' \cos(H-H') + k.n.k'.n' \cos(h-h')).$$

Bezeichnet man den constanten Theil der rechten Seite (CLAUSIUS' Viriel) mit V , so ist also:

$$40) \quad V = - \Theta$$

und:

$$41) \quad \alpha_i = - \frac{\partial V}{\partial c_i}.$$

Bis hierher haben wir angenommen, dass die xy Ebene mit der unveränderlichen Ebene zusammenfalle. Um daher die allgemeinste Darstellung der Coordinaten ohne irgend eine Voraussetzung in Bezug auf die xy Ebene zu gewinnen, hat man die alten Coordinaten x, y, z in neue ξ, η, ζ durch die Transformationsformeln zu transformiren:

$$\begin{aligned} \xi &= a_1 x + a_2 y + a_3 z, \\ \eta &= b_1 x + b_2 y + b_3 z, \\ \zeta &= c_1 x + c_2 y + c_3 z. \end{aligned}$$

Die Transformationscoefficienten kann man in bekannter Weise folgendermaassen durch drei Winkel f, φ, δ ausdrücken:

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos f \sin \delta, & a_2 &= \sin f \sin \delta, & a_3 &= \cos \delta, \\ b_1 &= -\sin f \cos \varphi - \cos f \sin \varphi \cos \delta, & b_2 &= \cos f \cos \varphi - \sin f \sin \varphi \cos \delta, & b_3 &= \sin \varphi \sin \delta, \\ c_1 &= \sin f \sin \varphi - \cos f \cos \varphi \cos \delta, & c_2 &= -\cos f \sin \varphi - \sin f \cos \varphi \cos \delta, & c_3 &= \cos \varphi \sin \delta. \end{aligned}$$

Setzt man noch der Kürze wegen:

$$\begin{aligned} x \cos f + y \sin f &= (x) = \sum K \cos (H - f), \\ -x \sin f + y \cos f &= (y) = \sum K \sin (H - f), \end{aligned}$$

so wird:

$$42) \quad \begin{cases} \xi = (x) \sin \delta + z \cos \delta, \\ \eta = - (x) \sin \varphi \cos \delta + (y) \cos \varphi + z \sin \varphi \sin \delta, \\ \zeta = - (x) \cos \varphi \cos \delta - (y) \sin \varphi + z \cos \varphi \sin \delta. \end{cases}$$

Wie man sieht, tritt der Winkel f nur in der Verbindung $H - f$ auf. In der That ist auch der Winkel f eine überzählige Constante. Denn man braucht in den Formeln 1) nur alle β um f zu vermindern, um H in $H - f$ zu verwandeln und die Winkel h unverändert zu lassen. Es ist also nicht nothwendig, den Winkel f noch weiter beizubehalten und man kann die Formeln 42) direct benutzen, indem man statt (x) und (y) wieder x und y schreibt. Die alten $[a_i, a_j]$ bleiben durch die Transformation 42) offenbar unverändert. Ferner folgt:

$$43) \quad [\delta, c_i] = [\delta, \beta_i] = [\varphi, c_i] = [\varphi, \beta_i] = 0,$$

und endlich wird:

$$44) \quad [\varphi, \delta] = S m_\lambda (x y' - y x') \cdot \sin \delta = S \Sigma m_\lambda N K^2 \cdot \sin \delta.$$

Bezieht man noch die Bewegung auf ein ruhendes Coordinatensystem, so müssen zu den Coordinaten in Bezug auf den Schwerpunkt die Coordinaten des letzteren addirt werden. Diese sind aber nach 9), § 6, lineare Functionen der Zeit. Es ergibt sich:

$$45) \quad [a, a_1] = [b, b_1] = [c, c_1] = - \frac{1}{\Sigma m}.$$

Somit sind alle LAGRANGE'schen Ausdrücke gebildet. Man kann leicht das System der $6n + 6$ Integrationsconstanten in ein kanonisches verwandeln, womit wir uns aber nicht weiter aufhalten wollen.

Den eigentlichen Kern des hier vorliegenden Problems bildet daher folgende Aufgabe:

Es sei das System:

$$46) \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

gegeben, in welchem H die Zeit nicht explicite enthält. Wendet man auf die p_i, q_i eine kanonische Transformation in neue Variable P_i, Q_i an, so wird das neue System:

$$47) \quad \frac{dP_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial Q_i}, \quad \frac{dQ_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial P_i}, \quad (i = 1 \dots n).$$

H ist dabei als Function der neuen Variablen auszudrücken. Gelingt es nun, diese kanonische Transformation so zu wählen, dass H nur noch die eine Hälfte der neuen Veränderlichen, etwa die P_i enthält, so ist die Aufgabe gelöst. Denn es wird $\frac{\partial H}{\partial Q_i} = 0$ und also

$P_i = \text{constans}$. Mithin werden auch die $\frac{dQ_i}{dt}$ constant und die Q_i lineare Functionen der Zeit. In unserem Falle sind die jetzigen P_i die früheren c_i und die jetzigen Q_i die früheren l_i .

Dies sind die Resultate, zu welchen die Annahme der durch Induction gefundenen Form 1) der Lösungen als eines mathematischen Gesetzes führt. Wenn sie auch nicht hinreichen, die Lösung wirklich zu finden, so eröffnen sie doch der Mechanik des Himmels eine neue Perspective.

Schliesslich noch einige kleine Bemerkungen.

Die Coordinaten sind dargestellt worden als trigonometrische Functionen von $(3n - 1)$ Winkeln:

$$l_1, l_2, \dots l_{3n-1}.$$

Diese kann man durch irgend $(3n - 1)$ andere

$$l'_1, l'_2, \dots l'_{3n-1}$$

ersetzen, welche durch die linearen Substitutionen mit ganzen Coefficienten:

$$48) \quad l'_\lambda = a_{1,\lambda} l_1 + a_{2,\lambda} l_2 + \dots + a_{3n-1,\lambda} l_{3n-1}$$

aus den alten gebildet sind, vorausgesetzt, dass die Substitutionsdeterminante $= 1$ ist. Denn dann werden die Auflösungen von 48):

$$49) \quad l_\lambda = b_{1,\lambda} l'_1 + b_{2,\lambda} l'_2 + \dots + b_{3n-1,\lambda} l'_{3n-1}$$

ebenfalls ganzzahlige Coefficienten enthalten. Ist demnach H irgend eine lineare Function der l mit ganzen Coefficienten, so wird sie vermöge 49) in eine ebensolche Function H' der l' verwandelt und umgekehrt.

Beschränkt man das Problem der $n + 1$ Körper auf die Entfernungen, so kommen nur Winkel von der zweiten Art h vor, für welche die Summe der ganzen Zahlen verschwindet. Daraus folgt, dass man diese Winkel auch so schreiben kann:

$$\begin{aligned} h &= b_1 l_1 + b_2 l_2 + \dots + b_{3n-1} l_{3n-1} \\ &= b_2 (l_2 - l_1) + b_3 (l_3 - l_1) + \dots + b_{2n-1} (l_{3n-1} - l_1), \end{aligned}$$

so dass sie also nur von den $3n - 2$ Winkeln

$$l_2 - l_1, l_3 - l_1, \dots l_{3n-1} - l_1$$

abhängen. Irgend einen Winkel der ersten Art kann man ebenso umformen in:

$$\begin{aligned} H &= a_1 l_1 + a_2 l_2 + \dots + a_{3n-1} l_{3n-1} \\ &= l_1 + a_2 (l_2 - l_1) + \dots + a_{3n-1} (l_{3n-1} - l_1). \end{aligned}$$

Daher:

Wenn $n + 1$ Körper um ihren Schwerpunkt kreisen, so werden ihre Entfernungen trigonometrische Functionen von $3n - 2$ Winkeln, welche sämtlich lineare Functionen der Zeit sind. Um die Coordinaten selbst zu berechnen, muss man noch einen Winkel von derselben Form hinzufügen.

Für $n = 1$ bestätigt sich dieses Resultat vollkommen. Die Entfernung des Planeten von der Sonne ist eine trigonometrische Function der mittleren Anomalie. Um die Coordinaten x und y zu berechnen (z ist hier $= 0$) bedarf man noch eines zweiten Winkels, der hier constant und zwar gleich der Länge des Perihels ist.

Für $n = 2$ hat dasselbe Resultat — ohne sich auf Convergencebetrachtungen einzulassen — LINDSTEDT formell aus den LAGRANGEschen Differentialgleichungen des Problems der drei Körper [38) und 45) § 7] abgeleitet. (Sur la détermination des distances dans le problème des trois corps — Annales de l'école normale 1884.)

Sind die Coefficienten α der Zeit t in den:

$$l_\lambda = \alpha_\lambda t + \beta_\lambda$$

incommensurabel, so kehren die ursprünglichen Coordinaten niemals wieder. Haben aber die α ein grösstes gemeinschaftliches Maass c , sind sie also alle ganze Vielfache von c , so werden auch die N und n ganze Vielfache von c . Die Coordinaten lassen sich dann in trigonometrische Functionen eines einzigen Winkels ct entwickeln und kehrt daher das System nach der Zeit $T = \frac{2\pi}{c}$ wieder in seine ursprüngliche Lage zurück, so dass die Bewegung rein periodisch wird, genau wie bei zwei Körpern.

In der That sind einige solche specielle Fälle für drei Körper in § 8 gekennzeichnet worden. LIOUVILLE hat bewiesen (Mémoire sur un cas particulier du problème des trois corps — Journal des Mathémat. pures et appl. 1842, Seite 110, und 1856, Seite 248), dass der specielle Fall, in welchem die drei Körper beständig in einer geraden Linie bleiben und im Raume ähnliche Ellipsen beschreiben, unstabil ist, insofern als eine ganz geringe Veränderung der Anfangslage, wie sie der kleinste Stoss oder die kleinste fremde Kraft bewirkt, zur Folge hat, dass mit der Zeit die Richtungen der drei Verbindungslinien vollständig auseinander gehen. Dies kann man sehr wohl nach den vorigen Auseinandersetzungen erwarten. Denn wenn die α in einem speciellen Falle commensurabel sind, so genügt ein geringes Abweichen von der ursprünglichen Lage, um diese Commensurabilität zu einer ungenauen zu machen. Die Verhältnisse der Perioden der l sind dann nicht mehr in ganzen Zahlen ausdrückbar und muss also die specielle, mit der reinen Periodicität verbundene Eigenthümlichkeit (hier das Liegen der drei Punkte in einer geraden Linie) schliesslich völlig verloren gehen.

Sind die α incommensurabel, so ist die Bewegung keine rein periodische. Jeder Winkel l hat dann allerdings seine Periode, aber diese Perioden stimmen nicht zusammen und kann daher die Bewegung dem Auge eine sehr verwickelte Form bieten, wie man sie in der That schon bei Bahnen der Componenten mancher mehrfachen Fixsterne beobachtet hat.

§ 42.

Kurze Geschichte der Störungstheorien.

Man kann die Geschichte der Störungstheorien auf NEWTON selbst zurückführen, welcher im dritten Buch seiner Principien die hauptsächlichsten Unregelmässigkeiten der Mondbewegung erklärt. Ein weiterer Fortschritt ist im Jahre 1747 zu verzeichnen, in welchem CLAIRAUT und D'ALEMBERT der französischen Akademie der Wissenschaften zwei Abhandlungen über das Problem der drei Körper überreichten, worin sie Methoden kennen lehrten, die Differentialgleichungen der Bewegung zu integrieren, wenn die Centrakraft die übrigen bedeutend überwiegt. Sie entwickelten die Hauptgrundzüge der Theorie der absoluten Störungen und hatte CLAIRAUT bald eine schöne Gelegenheit, seine Theorie glänzend zu bestätigen. Der sogenannte HALLEY'sche Komet war in den Jahren 1531, 1607 und 1682 zur Zeit seines Periheliums gesehen worden und es stand daher fest, dass er in etwa 75 Jahren seinen Umlauf um die Sonne vollendet. Seine Rückkehr war daher spätestens gegen Ende des Jahres 1758 zu erwarten. CLAIRAUT berechnete die Störungen, welche die damals bekannten Planeten auf ihn ausübten und theilte als Resultat seiner Untersuchungen der Akademie der Wissenschaften zu Paris mit, dass diese Störungen sein Wiedererscheinen bis etwa Mitte April 1759 verzögern würden. Dieser am 14. November 1758 gemachten Mittheilung fügte er hinzu, dass die kleinen Vernachlässigungen in seiner Rechnung die Verzögerung, deren Betrag er auf 690 Tage angegeben, um einen Monat etwa ändern könnten.

In der That traf das Wiedererscheinen erst am 12. März 1759, also innerhalb der von ihm angegebenen Grenzen ein, und wäre die Abweichung von seiner Zeitangabe noch geringer geworden, wenn ihm die Saturnmasse genauer bekannt gewesen wäre.

Der Begründer der eigentlichen auf der Methode der Variation der Constanten beruhenden Planetentheorie war LEONHARD EULER. Dieser geniale Mathematiker hat mit prophetischem Seherblick, wie in fast allen mathematischen Gebieten, so auch hier der Wissenschaft die Bahnen vorgezeichnet, welche sie zu verfolgen hatte. In drei Abhandlungen, welche in den Jahren 1748, 1752 und 1756 von der Pariser Akademie der Wissenschaften gekrönt wurden, entwickelt er im steten Fortschritt die Methode der Variation der Constanten. Allerdings waren seine Formeln nicht ganz genau, weil er manche unter den sechs Constanten nicht variierte, indessen gelang es ihm doch, für

den Fall zweier Planeten die Existenz säcularer Variationen der Excentricitäten und Neigungen, der Perihelien und Bahnknoten nachzuweisen. Leider waren bei der numerischen Berechnung viele Fehler aufgetreten, welche das Resultat völlig entstellten und daher vielleicht EULER mit veranlassten, sich anderen Untersuchungen zu widmen. In seinen Abhandlungen findet man ausser der Grundlage der allgemeinen Theorie noch die fundamentalen Sätze über die Entwicklung der Störungsfunction in eine trigonometrische Reihe, deren Argumente die mittleren Anomalien bilden.

Die grundlegenden EULER'schen Gedanken wurden bis zu ihren letzten Gründen von LAGRANGE verfolgt, dessen Verdienste um die Astronomie allein hinreichen würden, ihm ein unzerstörbares Denkmal zu setzen. Seine erste Arbeit erschien in den *Mélanges de la Société de Turin*, Tome III, 1766. Er betrachtet hier in dem Ausdruck für den Radiusvector die Excentricität und die Länge des Perihels als variabel und differentiirt in diesem Sinne total nach der Zeit. Den Theil des Differentialquotienten, welcher von der Variation dieser beiden Constanten herrührt, setzt er gleich Null, differentiirt noch einmal, führt darauf die Störungsfunction ein, und erhält so zwei Gleichungen zur Bestimmung der Differentialquotienten jener beiden Elemente. Allerdings ist dieses Verfahren ungenau, weil er von der Variation der grossen Achse und der Epoche des Perihels absieht. Doch stellt er, sich auf zwei Planeten beschränkend, die richtige Endgleichung zur Bestimmung der säcularen Perioden, welche bei EULER fehlerhaft gewesen war, auf. Auch für die Neigungen und Knoten erhält er richtige Formeln, so dass seine numerischen Resultate bei der Anwendung der Theorie auf die grössten Planeten — Jupiter und Saturn — ziemlich richtig sind. Dagegen treten bei der Bestimmung der mittleren Längen der beiden Planeten zwei dem Quadrate der Zeit proportionale Glieder auf, die durchaus falsch sind und sich durch die Ungenauigkeiten eingeschlichen haben, welche der grosse Mathematiker in diesem ersten Versuch auf einem unbearbeiteten Felde sich gestattet hatte.

Im Jahre 1773 reichte LAPLACE der Akademie der Wissenschaften seine erste Arbeit über die Theorie des Planetensystems ein, welche im Jahre 1776 in den *Mémoires des savants étrangers* erschien. Er bestimmte mit voller Genauigkeit die Formeln für die Differentialquotienten der Elemente, welche allerdings durchaus noch nicht die erst später entstandene elegante Form besaßen.

Indem er die numerischen Rechnungen für Jupiter und Saturn

ausführte, fand er zu seiner Ueberraschung, dass sich die säcularen Glieder in dem Werthe für den Differentialquotienten der grossen Achse gegenseitig aufhoben und einmal auf diese Erscheinung aufmerksam gemacht, gelang ihm der Nachweis, dass dieselbe kein Spiel des Zufalls, sondern in den Formeln begründet war, wenn man in der Entwicklung der Störungsfunction bis zu den Gliedern zweiten Grades in Bezug auf Excentricitäten und Neigungen ging.

Die Theorie der säcularen Variationen der Elemente entsprang im letzten Grunde dem Umstande, dass das gewöhnliche Verfahren der Integration durch Reihen der Zeit proportionale Glieder hervorbrachte. Alles Sinnen von EULER, LAGRANGE und LAPLACE war nun darauf gerichtet, diese Glieder zu beseitigen. Wenn man ihre Werke studirt, so kann man sich der Vermuthung nicht erwehren, dass neben den rein mathematischen Ueberlegungen noch eine gewisse Art methaphysischer Gründe ihre frühesten Forschungen, welche den Uebergang von völliger Unkenntniss zur vollendeten Klarheit vermittelten, leitete. Die sich bald zeigende Thatsache, dass die Theorie der absoluten Störungen für das Planetensystem nicht die angemessenste war, liess allmählig die Theorie der Variation der Constanten entstehen, und zwar eigenthümlicher Weise zunächst nicht in ihrer ganzen Reinheit, sondern sonderbar vermischt mit der ersten Theorie. Man sah ein, dass der säcularen Glieder wegen die Elemente sehr grosse Umgestaltungen im Laufe der Zeit erleiden müssen, aber anstatt diese direct zu bestimmen, schlug man zunächst Umwege ein. Dies zeigt sich sehr deutlich in LAPLACE, *Mécanique céleste*, erster Band, wo zunächst aus den Ausdrücken für die absoluten Störungen der Coordinaten künstlich die der Zeit proportionalen Glieder entfernt und dann nach Einführung der vollständigen Theorie der Variation der Constanten der naturgemässe Weg der Integration unter alleiniger Beibehaltung des säcularen Gliedes der Störungsfunction eingeschlagen wird.

Ein weiterer Fortschritt ist in einer 1774 von LAGRANGE verfassten, in den *Annales de l'Académie des sciences* erschienenen Abhandlung zu verzeichnen, wo er statt der Excentricitäten und Perihelien die Elemente h und l und statt der Neigungen und Knoten die Elemente p und q einführt. Die Differentialgleichungen wurden durch diese Transformation linear. Im Jahre 1780 betrachtete er in einer in den *Mémoires de l'Académie de Berlin* 1782 abgedruckten preisgekrönten Abhandlung über die Störungen der Kometen die elliptischen Coordinatenausdrücke zum ersten Male in ihrer ganz allge-

meinen Form, d. h. nicht allein als Functionen der Zeit, sondern auch der sechs eingeführten Integrationsconstanten. Es werden hier zum ersten Male die Grundzüge der Variation der Constanten in ihrer ganzen Strenge und Reinheit festgestellt und die Formeln durch Einführung der Störungsfunction vereinfacht. Indem LAGRANGE seine allgemeine Theorie auf den Ausdruck der grossen Achse anwendete,

erkannte er sofort, dass in $\frac{da}{dt}$ nur periodische Glieder entstehen

und so war — mit einem Federstrich, wie JACOBI sagt — der herrliche Satz bewiesen, dass die Störungen auf die grosse Achse nur einen den störenden Massen proportionalen und durch periodische Glieder ausdrückbaren Einfluss haben können, so lange man sich mit der ersten Potenz der störenden Massen begnügt.

Im Jahre 1809 hat POISSON in der Abhandlung: „Sur les inégalités séculaires des moyens mouvements des planètes“ (Journal de l'école polytechnique, Bd. 1) nachgewiesen, dass dieser Satz auch seine Giltigkeit besitzt, wenn man ihn auf die zweite Potenz der störenden Massen ausdehnt. Er gelangt zu diesem Resultat durch eine eigenthümliche Anwendung des Satzes von der lebendigen Kraft. LAPLACE theilt in der Mécanique céleste, livre VI, einen anderen Beweis mit, welcher, weiter ausgeführt, hier reproducirt worden ist. Auch LAGRANGE hat versucht, diesen Beweis zu liefern; jedoch leidet sein Verfahren an einem kleinen Vorzeichenfehler, wie SERRET gezeigt hat.

Man hat versucht, dieses Resultat auf die dritten Potenzen der störenden Massen auszudehnen. So hat MATHIEU (Mémoire sur les inégalités séculaires des grands axes des orbites des planètes — Journal von CRELLE 1875) Untersuchungen angestellt, aus welchen er auf das Fehlen säcularer Glieder, selbst bei Berücksichtigung der dritten Potenzen schliesst. Später haben noch TISSERAND, HARÉTU, GASPARI, GYLDÉN u. s. w. das Resultat theils bestätigt, theils nicht, ein Beweis dafür, dass diese Frage noch nicht als abgeschlossen anzusehen ist.

Nachdem die Formeln für die Differentialquotienten der Elemente entwickelt waren, versuchte man, angeregt durch die merkwürdig einfache Darstellungsweise desjenigen der grossen Achse, ähnliche einfache Ausdrücke für die übrigen zu erhalten. Nach geschickten Umformungen gelang es LAPLACE, die Fundamentalformeln, wie sie in 8), § 28, angegeben sind, aufzustellen. Seine Entdeckung theilte er im Jahre 1808 der gelehrten Welt mit. Durch ein merkwürdiges Zusammentreffen veröffentlichte LAGRANGE in derselben Sitzung im Bureau

des Longitudes dieselben Formeln. Er war aber auf einem ganz anderen Wege zu ihnen gelangt, nämlich durch Einführung der Ausdrücke (a_λ, a_μ) und deckte er hiermit die eigentliche Quelle dieser wichtigen Formeln auf. Mit denselben gewann die Darstellung der Theorie eine, gegen früher verglichen, wunderbare Einfachheit und Eleganz, welche die Astronomen befähigte, an Stelle der Differentialquotienten der Störungsfunction nach den Coordinaten diejenigen nach den Elementen treten zu lassen.

Eine, wie wir ausführlich erörtert, sehr bemerkenswerthe Erscheinung bietet der in die periodischen Glieder durch die Integration eingeführte Nenner. LAPLACE gebührt das Verdienst, zum ersten Male auf dieselben aufmerksam gemacht und auch das ausserordentliche Anwachsen eines ursprünglich kleinen periodischen Gliedes, wenn dieser Nenner sehr klein ist, näher untersucht zu haben. Er wendete die Theorie auf die Planeten Jupiter und Saturn an und erklärte dadurch eine äusserst räthselhafte Erscheinung. Der Astronom HALLEY hatte aus dem Vergleich der alten Beobachtungen mit denen des Mittelalters geschlossen, dass die Bewegung des Saturn um die Sonne sich verlangsame und die des Jupiter sich beschleunige. Dagegen hatte LAMBERT gefunden, dass in der neueren Zeit das Umgekehrte statffinde. LAPLACE erkannte, dass die Erklärung dieses scheinbaren Widerspruches gegen das Gesetz der Unveränderlichkeit der mittleren Bewegungen durch ein bisher seiner Kleinheit wegen vernachlässigtes Glied der Störungsfunction gegeben wurde und bestimmte die Periode dieser Störungen auf etwa 930 Jahre. Diese Störungen „von langer Periode“, wie man sie zu nennen pflegt, sind die Quelle zahlreicher anderer und namentlich beeinflussen sie auch die säcularen Variationen der Elemente.

Wenn die Umlaufszeiten noch angenäherter commensurabel sind, so wird die Periode immer länger und der Coefficient immer grösser. Schliesslich tritt ein Phänomen ein, wie es in anderer Form in der That in unserem Planetensystem verwirklicht ist. Die beiden Planeten wirken dann derart aufeinander, dass ihre Umlaufszeiten genau commensurabel werden und es wird ein inniges Band zwischen ihnen geschaffen, das für alle Zeiten bestehen bleibt. Es fehlte, wie LAPLACE gezeigt hat, durchaus nicht viel, dass Jupiter und Saturn diese merkwürdige Erscheinung zeigten. Man brauchte dazu nur die grosse Achse des Saturn um $\frac{1}{520}$ zu vermindern und die des Jupiter um $\frac{1}{1300}$ vermehren.

Nachdem die Theorie fest begründet und in allen Theilen aus dem Dunkel des ersten Anfanges in das Stadium vollständiger Durchsichtigkeit getreten war, handelte es sich besonders darum, die analytischen und numerischen Entwicklungen bis zu einem immer höheren Grade der Schärfe und Genauigkeit zu treiben. Wenn man die Störungsfunction bis zu höheren Potenzen der Excentricitäten und Neigungen entwickeln will, so nimmt die Rechnung immer grössere Dimensionen an. Es haben sich daher die bedeutendsten Mathematiker um dieses Problem bemüht und dasselbe gefördert. So hat CAUCHY in den Comptes rendus eine zahlreiche Reihe von Artikeln veröffentlicht, in welchen er ganz neue Ideen vorlegt und seine berühmte Theorie der Residuen anwendet. CAUCHY drückt zunächst die Coordinaten vermittelst der excentrischen Anomalien aus und entwickelt die Störungsfunctionen nach den trigonometrischen Functionen derselben. Vermittelst der BESSEL'schen Functionen ist es dann leicht, von den excentrischen zu den mittleren Anomalien überzugehen. Von besonderer Eleganz und Einfachheit werden seine Formeln, wenn die Ordnung des Gliedes, dessen Coefficienten man bestimmen will, eine sehr hohe ist. Seine Arbeiten auf diesem Gebiet scheinen bei den übrigen Astronomen keinen grossen Anklang gefunden zu haben, trotzdem er in einer Controverse mit LEVERRIER bewiesen hat, dass seine Resultate auch praktische Verwerthung finden können.

Wenn es nur auf die numerische Berechnung eines Coefficienten ankommt, so kann man denselben, wie wir gesehen, durch zweimalige Integration auswerthen. Es ist bemerkenswerth, dass LIOUVILLE (Note sur le calcul des inégalités periodiques du mouvement des planètes) Journal de Mathématiques pures et appliquées 1836, pag. 197, ein Verfahren angegeben hat, wie man mit Erreichung eines sehr hohen Grades von Genauigkeit dieses Doppelintegral auf ein einfaches zurückführen kann. Später hat LEVERRIER sich sehr eingehend mit der numerischen und auch analytischen Entwicklung der Störungsfunction beschäftigt und ist dabei mit einer bewunderungswürdigen Genauigkeit vorgegangen. In seinen Recherches astronomiques hat er alle Coefficienten bis zum siebenten Grade incl. berechnet und damit eine Arbeit vollzogen, die nur der beurtheilen kann, welcher einmal dergleichen Rechnungen unternimmt. Ausser den oben genannten Astronomen und Mathematikern haben sich BESSEL, LUBBOCK, ENCKE, HANSEN, GYLDÉN, NEWCOMB und Andere mit der Entwicklung der Störungsfunction beschäftigt. HANSEN, welcher überhaupt gern ihm eigenthümliche Wege eingeschlagen hat, hält für den Fall, dass die

Excentricität und Neigung des gestörten Planeten verhältnissmässig gross ist, die Entwicklung der Störungsfunction nach der excentrischen Anomalie dieses Planeten und nach der mittleren Anomalie des störenden für zweckmässig.

Die säcularen Werthe der Elemente sind von LAPLACE und LAGRANGE unter Beschränkung auf den zweiten Grad der Excentricitäten und Neigungen entwickelt worden und ist es, so viel ich weiss, LEVERRIER, welcher zuerst den Einfluss der vernachlässigten Glieder zu berechnen unternommen hat. Später sind seine Untersuchungen von dem Astronomen LEHMANN, welcher aber vor der Vollendung seiner numerischen Untersuchungen starb, wieder aufgenommen worden. Es ist die Meinung LEVERRIER's und LEHMANN's, dass der Einfluss dieser Glieder grösser ist, als man früher angenommen und dass vielleicht an den säcularen Perioden, wie sie durch die Wurzeln der Säculargleichungen bestimmt wurden, grosse Verbesserungen anzu bringen sind.

Die Störungstheorien bieten einen sehr weiten Spielraum für Umgestaltungen, welcher auch verschiedentlich benutzt worden ist, um auf neue Weisen dem Problem zu Leibe zu gehen. So hat z. B. HANSEN ein bewegliches Coordinatensystem eingeführt, um mit dessen Benutzung die Bewegung des Planeten um die Sonne auf eine ebene zurückzuführen. Zu diesem Zweck denkt er sich jeden Punkt der Bahn mit der Sonne verbunden und so einen (allerdings sehr flachen) Kegel mit der Sonne als Spitze gebildet. Auf diesem Kegel rollt eine Ebene ohne Gleitung, so dass in jedem Augenblick ein Punkt der Planetenbahn mit einem Punkte der Ebene zusammenfällt. Auf diese Weise wird die Bahn in eine Ebene ausgebreitet. Zur Bestimmung dieser ebenen Bahn erhält er zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung und zur Bestimmung der Drehung der Ebene drei Differentialgleichungen erster Ordnung. Ausserdem führt er für die Zeit zwei Zeichen t und τ ein, je nachdem sie direct in die elliptischen Coordinaten oder indirect durch die Störungen eingeführt wird und entwickelt gewisse Betrachtungen, in welchen er diese Zeit variirt. Da sich seine Untersuchungen indessen hauptsächlich auf die Theorie des Mondes, der kleinen Planeten und der Kometen beziehen, für diese aber von grosser Wichtigkeit sein sollen, so ist hier von ihrer näheren Erläuterung Abstand genommen worden, trotzdem sie nicht ohne mathematisches Interesse sind.

Dasselbe gilt von den Untersuchungen DELAUNAY's. Derselbe geht von dem Princip aus, zunächst nur ein einziges, aber möglichst

einflussreiches Glied der entwickelten Störungsfunction zu betrachten und die so entstehenden Differentialgleichungen zu integrieren. Dies ist mit mathematischer Genauigkeit möglich. Mit Hilfe dieser Integrale werden die Differentialgleichungen umgestaltet und darauf wird wieder ein durch seine Grösse hervortretendes Glied in Rechnung gezogen. Dies geschieht mehrmals hintereinander, bis der Rest klein genug ist, um sehr rasch mittelst der gewöhnlichen Methoden erledigt zu werden.

In neuerer Zeit hat GYLDÉN das Problem der Planetenbewegung auf andere Weisen zu bewältigen gesucht. Um die speciellen Störungen zu berechnen, theilt er die Bahn in Theile und entwickelt für jeden die Störungen besonders, nachdem er in die elliptischen Coordinaten elliptische Functionen eingeführt. Diese behält er dann mit besonderer Vorliebe bei, weil mit ihrer Hilfe die Integrationen schneller convergiren sollen. Dann hat er einen eigenthümlichen Begriff, den der „intermediären Bahn“ eingeführt, worunter er eine Bahn versteht, von welcher der Planet niemals bedeutend abweicht. Insofern liegt in diesem Begriff Nichts Neues; vielmehr ist er in § 33 enthalten; besonders zu erwähnen ist aber, dass er dabei nicht von der KEPLERschen Ellipse ausgeht, sondern auf directem Wege zu einer intermediären Bahn gelangen will. Einen Theil seiner Principien findet der Leser in der Abhandlung von GYLDÉN: „Die intermediäre Bahn des Mondes“ (Acta mathematica, Bd. 7) und in der von ANDOYER: „Contribution à la théorie des orbites intermédiaires (Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1887, Tome I). Auch über die Convergenz der in der Astronomie gebräuchlichen unendlichen Reihen hat er neuerdings Untersuchungen angestellt, welche aber noch zu keinem befriedigenden Abschluss geführt haben.

Eines der Hauptziele der mathematischen Bestrebungen der Jetztzeit besteht in der Untersuchung der Eigenschaften der durch Differentialgleichungen definirten Functionen. Ueberblickt man die grosse Fülle von Forschungen, welche allein die Theorie der linearen Differentialgleichungen in neuester Zeit hervorgerufen hat und täglich noch hervorruft, ist man sich deutlich der grossen Tiefe der hier zu Grunde gelegten Fragen bewusst, so kann man nicht umhin, die Schwierigkeiten des Problems der drei Körper in seiner allgemeinsten Fassung sehr hoch anzuschlagen. Allerdings handelt es sich hier nur um reelle Variable, durch welchen Umstand die Untersuchungen wesentlich an Einfachheit gewinnen. Was den Astronomen interessirt, besteht nicht in der Aufsuchung aller Eigenschaften der analytischen Aus-

drücke, in dem Auffinden von Unstetigkeitspunkten, Verzweigungspunkten, singulären Punkten u. s. w., sondern in dem Nachweis, dass solche Punkte durchaus nicht vorhanden sind, falls man als unabhängige Variable die Zeit setzt, und diese auf nur reellem Wege stetig von $-\infty$ bis $+\infty$ überführt. Es handelt sich darum, unter dieser Beschränkung auf einen Functionszweig, oder vielmehr auf eine Functionslinie, die Coordinaten in convergente Reihen zu entwickeln, die dann aber bedingungslos convergiren müssen. Es ist leicht einzusehen, dass dies möglich sein kann, ohne das grosse Umkehrproblem der Differentialgleichungen zu berühren, welches uns schon so herrliche Resultate geliefert; dass es vielmehr einen directen Weg geben muss, in obigem Sinne das Vielkörperproblem zu lösen und so endgiltig die Fragen zu beantworten, welche trotz aller Untersuchungen noch immer Fragen bleiben.

Für die praktischen Zwecke der Astronomie genügen bloss theoretische Erörterungen nicht. Auch die numerischen Rechnungen, auf welche der Verfasser dieses Buches nicht eingegangen, welche er vielmehr, um den rein analytischen Charakter der Darstellung zu wahren, ganz in den Hintergrund gedrängt hat, verlangen grosses Geschick und noch grössere Ausdauer. Diese Rechnungen nehmen in der That kaum zu bewältigende Dimensionen an, wenn man, wie es LEVERRIER in den *Recherches astronomiques* (*Annales de l'observatoire de Paris, Mémoires*) gethan hat, alle Glieder berücksichtigt, welche den geocentrischen Ort des Planeten noch um $\frac{1}{10}$ Secunde verrücken. Die Vergleichung der erhaltenen Zahlen mit der Beobachtung liefert den besten Prüfstein für die Richtigkeit der Theorie und hat sehr häufig zur Entdeckung bis dahin vernachlässigter aber doch einflussreicher Glieder geführt. Auch liefert sie das einzige Mittel, um die Massen und Elemente der Planeten immer genauer zu bestimmen.

Nachdem LEVERRIER seine Berechnungen und die Vergleichung mit den Beobachtungen durchgeführt, stellte sich das Resultat als ein sehr zufriedenstellendes heraus. Die Unterschiede fielen meistens in die Grenzen der Beobachtungsfehler und nur einzelne kleine Punkte harren der Aufklärung. So fand LEVERRIER für die säculare Bewegung des Merkurperihels einen etwas grösseren Werth aus der Beobachtung als aus der Rechnung und er schloss daraus, dass zwischen Sonne und Merkur noch ein Planet (oder auch vielleicht ein ganzes System von Planetoiden) enthalten sein müsse, welcher bis dahin den Beobachtungen entgangen und in der That eine Beschleunigung des Merkurperihels bewirken würde. Dieser intramerkurielle Planet, welcher

bereits den Namen Vulcan erhalten hat, ist bis jetzt aber noch nicht mit Sicherheit festgestellt worden, trotzdem sehr eifrig nach ihm gesucht wurde. Einige Male wollte man kleine schwarze Punkte auf der Sonnenscheibe bemerkt haben, doch ist ein Irrthum oder eine Verwechslung mit Sonnenflecken nach der Meinung der Astronomen durchaus wahrscheinlich.

Die nach LEVERRIER's Formeln entworfenen Planetentafeln sind heute allgemein anerkannt; nur für Uranus und Neptun hält man die NEWCOMB'schen für noch besser.

Selbstverständlich kann das NEWTON'sche Gravitationsgesetz nicht den Anspruch erheben, seine Geltung an den Beobachtungen, aus welchen es geschöpft worden, nicht erproben zu müssen. Ob die Gravitation eine wirkliche *prima causa* sei, ob sie vielleicht auf andere Kräfte, vielleicht auf Aetherstösse oder elektrische Anziehungen zurückgeführt werden könne, darüber hat die Zukunft zu entscheiden. Möglicherweise ist das NEWTON'sche Gesetz nur ein, wenn auch ausserordentlich angenähertes. Vielleicht wirken auch noch andere Kräfte auf die Bewegungen der Himmelskörper ein, wie etwa der Widerstand des Aethers, welcher nach der heute geltenden Annahme der Physiker nicht allein den Sternenraum, sondern auch die Materie durchdringt. In der That hat ENCKE aus der Beschleunigung der Umlaufszeit des nach ihm genannten Kometen auf einen solchen Widerstand geschlossen.

Jedenfalls ist das Gravitationsgesetz, wie gesagt, sehr angenähert erfüllt. Der Mathematiker hat sich auf den Standpunkt zu stellen, dass es ganz streng richtig ist und daraus die Folgerungen zu entwickeln.

Wie genau dieselben den Beobachtungen entsprechen, dafür hat die vor etwa vierzig Jahren durch wissenschaftliche Untersuchungen bewirkte Entdeckung des Planeten Neptun den schönsten Beweis geliefert. Im Jahre 1781 war von W. HERSCHEL ein neuer Planet, der Uranus entdeckt worden. Seitdem wurde er unausgesetzt beobachtet und so die Elemente seiner Bahn bestimmt. Die darauf bezüglichen Rechnungen wurden von BOUVARD nach LAPLACE's Angaben ausgeführt. Es zeigte sich aber, dass der neue Planet im Laufe der Zeit in sehr gesetzmässiger Weise von seinem berechneten Orte abwich und dass die Differenz um so grösser wurde, je mehr die Zeit vorrückte. Dazu kam, dass derselbe Planet, wie sich herausstellte, bereits früher mehreremals beobachtet und in seiner Stellung fixirt worden war, dass man ihn aber damals für einen Fixstern gehalten hatte und dass es unmöglich war, diese alten Beobachtungen in befriedi-

gender Weise darzustellen. BOUVARD selbst schloss daher schon im Jahre 1821 (*Tables astronomiques, les mouvements d'Uranus annoncent l'existence d'une planète perturbatrice extérieure*) auf die Existenz eines Planeten jenseits des Uranus. Jenseits desselben, d. h. in noch weiterer Entfernung von der Sonne, weil sein Einfluss sich sonst auch auf den Saturn hätte erstrecken müssen. Man gewöhnte sich allmählig an die Idee, aus den beobachteten Störungen die Elemente und die Masse des neuen Planeten zu berechnen und so eine vollständige Umkehrung des Problems der Störungen vorzunehmen. Bedenkt man aber die Kleinheit dieser Störungen — sie betrugen nicht über einige Minuten — und die complicirte analytische Form, in welcher die Elemente in die Störungsausdrücke eingehen, so sieht man ohne Weiteres die Subtilität der Frage ein. Der Astronom BESSEL interessirte sich lebhaft für dieselbe und hatte, wie aus Briefen hervorgeht, die Absicht, sich mit ihr zu beschäftigen, als der Tod ihm ein Ziel setzte. Sie wurde fast gleichzeitig von zwei anderen Astronomen, LEVERRIER und ADAMS gelöst. Der Erstere theilte seine vorbereitenden Untersuchungen der gelehrten Welt in den *Comptes rendus* mit und legte seine Forschungen in der ausführlichsten Weise in dem Werke: *Recherches sur les mouvements de la planète HERSCHEL (Uranus), Connaissance des temps pour 1849* vor, nachdem im Jahre 1846 der neue Planet nur um einen Grad von dem von LEVERRIER angegebenen Ort abweichend in der That zum ersten Male von GALLE in Berlin wirklich gesehen worden war. Dieses Werk zu studiren gewährt hohen Genuss, weil in ihm grosse Umsicht, peinliche Genauigkeit der analytischen und numerischen Entwicklungen und ganz besonders ausserordentlich klare Entwicklung des Gedankenganges sich vereinigen. Zunächst wird untersucht, ob einige Glieder der Entwicklung vernachlässigt worden, welche so noch einen in Betracht kommenden Fehler bewirkt hätten. In der That werden einige, aber unbedeutende nachgewiesen. Nach dieser Berichtigung wird versucht, ob man nicht durch kleine Abänderungen in der angenommenen Wahl der Elemente die Fehler fortschaffen könne und ein negatives Resultat sicher gestellt. Diese Vorbereitungen stellen den störenden Einfluss einer unbekannten Ursache ausser Zweifel und wird dieselbe nach Zurückweisung anderer Möglichkeiten in einem Planeten gesucht, welcher noch weiter von der Sonne entfernt ist, als der Uranus. Es werden die grosse Achse, die Epoche des Perihels, Excentricität und Länge des Perihels und die Masse desselben als die fünf zu bestimmenden Unbekannten eingeführt, während die Neigung gegen den Uranus der

Kleinheit der Breitenstörungen wegen vernachlässigt wird. Jede Beobachtung giebt eine Bedingungsgleichung zwischen diesen fünf Unbekannten und da eine grosse Anzahl von Beobachtungen vorliegt, werden sie in Gruppen getheilt. In der complicirtesten Form erscheint natürlich die grosse Achse und macht deshalb LEVERRIER, das sogenannte BODE'sche Gesetz als einzigen Anhalt benutzend, die Annahme, dass sie doppelt so gross sei, wie die des Uranus. Hierauf werden endlich die vier noch bleibenden Unbekannten bestimmt. Schliesslich findet er durch Versuche, dass eine Verringerung in dem angenommenen Werth der grossen Achse die unvermeidlichen Fehler noch verringert und zum Schlusse bestimmt er die Grösse dieser Verminderung und damit die Endwerthe der Elemente.

Unzweifelhaft wäre LEVERRIER zu viel genaueren Resultaten gelangt, wenn er nicht, durch das BODE'sche Gesetz verleitet, von Anfang an einen viel zu grossen Werth für die grosse Achse des unbekannten Planeten angenommen hätte. Es ist klar, dass er mit dem Wachsthum derselben auch die Masse des Planeten wachsen lassen muss, weil der unbekannte Planet und Uranus angenähert dieselbe Länge besaßen und daher eine Vergrösserung der Achse die Entfernung beider vergrösserte, also die Anziehung nach dem NEWTON'schen Gravitationsgesetz schwächte. Hieraus erklärt sich auch, dass er für die Masse einen ungefähr doppelt zu grossen Werth erhält und daher alle Elemente mit Ausnahme der mittleren Länge, also des wichtigsten, weil den Ort am Himmel bestimmenden Elementes ganz falsch herauskommen.

Dasselbe gilt von den Elementen des Astronomen ADAMS, der seine Untersuchungen in der Arbeit: *An Explanation of the observed irregularities in the motion of Uranus* (Memoires of the Royal Society of London 1847) veröffentlichte. Da er einen noch grösseren Werth für die grosse Achse erzielte, war die von ihm gefundene Masse noch grösser als die von LEVERRIER. Da er seine Resultate einige Monate früher dem Astronomen AIRY mittheilte, als die Untersuchungen LEVERRIER's erschienen, so wäre der neue Planet unzweifelhaft früher mit Hilfe des Fernrohres entdeckt worden, wenn nicht AIRY Zweifel in die Richtigkeit der ADAM'schen Resultate gesetzt und deshalb eine Durchmusterung der betreffenden Himmelsgegend unterlassen hätte.

So hat auch hier wieder das NEWTON'sche Gravitationsgesetz die beste Prüfung auf seine Richtigkeit bestanden, indem es eine Entdeckung veranlasst hat, welche sonst vielleicht noch viele Jahre hätte auf sich warten lassen.

§ 43.

Bemerkungen zu den Tabellen.

Als Längeneinheit ist die halbe grosse Achse der Erdbahn gewählt worden. Allerdings nicht diejenige halbe grosse Achse, welche wir als sogenannten säcularen Werth derselben bezeichnet hatten, sondern diejenige, wie sie aus der beobachteten Umlaufszeit der Erde mittelst des dritten KEPLER'schen Gesetzes folgt. Um den „säcularen Werth“ selbst zu erhalten, muss man die in § 32 angegebene Verbesserung anbringen. Von den Massen sind jedenfalls die des Merkur und der Venus am ungenauesten bekannt. Da diese beiden Planeten keine Monde haben — wenigstens sind sie noch nicht entdeckt worden —, so ist man bei der Berechnung ihrer Massen allein auf die Störungen angewiesen, welche sie auf die ihnen nahe kommenden Kometen und die Erde ausüben. Es ist daher wohl möglich, dass namentlich die Merkurmasse noch eine sehr erhebliche Verbesserung erfahren muss.

Die säcularen Variationen der Länge des Perihels, des aufsteigenden Knotens und der Neigung beziehen sich nicht auf eine feste Ebene, sondern auf die bewegliche Ekliptik, auf welcher als Anfangslage für die Längenzählung das in Folge der Präcession jährlich um etwa $50'',2113$ zurückweichende und von der Nutation der Erdachse befreite Frühlingsäquinocmium gewählt wurde. Bezieht man aber diese Variationen auf die feste Ekliptik von 1850, so schreiten in diesem Jahrtausend alle Perihellängen, mit Ausnahme derjenigen der Venus, vor; während die Knotenlängen abnehmen, mit Ausnahme derjenigen des Jupiter und Uranus.

Die fünfte Tabelle zeigt die Wurzeln der Gleichungen 21) und 42), § 31, wobei als Zeiteinheit das siderische Jahr gewählt wurde. Es sind also nur Secunden, um welche die säcularen Winkel G und Γ jährlich wachsen oder abnehmen. Die absolut grösste dieser Zunahmen ist γ_4 . Nennt man T die Zeit, in welcher der zugehörige Winkel $\Gamma_4 = \gamma_4 t + \delta_4'$ um 360° gewachsen ist, so folgt:

$$T \cdot \gamma_4 = 1296000'',$$

$$T = 49937,$$

also rund 50 000 Jahre. Die längste Periode dagegen beträgt beinahe 2 000 000 Jahre. Hieraus kann sich der Leser eine Vorstellung davon machen, wie langsam die säcularen Variationen der Elemente verlaufen. Die numerischen Coefficienten K und K' , welche LEVERRIER

in den Recherches astronomiques, Band II, vom Neuen berechnet hat, sind hier nicht aufgeschrieben worden. Ich will nur bemerken, dass die acht Planeten sich hier in zwei Gruppen theilen, in die der äusseren und die der inneren. Die erste Gruppe umfasst Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun. Die Wurzeln g_1 bis g_4 und γ_1 bis γ_4 hängen fast ausschliesslich von diesen vier Planeten ab und treten in den säcularen Gliedern nur die Winkel G_1 bis G_4 und Γ_1 bis Γ_4 mit bedeutenderen Coefficienten auf. Die Winkel G_5 bis G_8 und Γ_5 bis Γ_8 spielen nur für das innere System, welches aber auch an den säcularen Perioden des äusseren Systems Antheil nimmt, eine Rolle. Man sollte zunächst der Kleinheit der Massen der inneren Planeten wegen erwarten, dass die ihnen entsprechenden g und γ , sowie die zugehörigen Coefficienten bedeutend kleiner sind, als die übrigen. Dem ist aber nicht so. Denn ist auch z. B. die Jupitermasse etwa 400-mal so gross als die Venusmasse, so kommt dafür die Venus der Erde über 14mal so nahe, als Jupiter und da die Anziehung dem Quadrat der Entfernung proportional ist, so ist klar, dass man das Verhältniss der störenden Einflüsse Jupiters und der Venus auf die Erde roh wie 2 : 1 zu schätzen hat. Nun kommt aber hinzu, dass die Venusbahn eine viel stärkere Neigung gegen die Erdbahn hat und dass also im Besonderen die Störungen der Ekliptik zum grossen Theil von der Venus herrühren.

Der Langsamkeit der säcularen Störungen wegen kann man sie sehr gut für Jahrhunderte lang als der Zeit proportional annehmen. Ganz sicher geht man aber, wenn noch ein dem Quadrat der Zeit proportionales Glied hinzugefügt wird. Wählt man als Anfangspunkt der Zählung das Jahr 1800, so kann man die Excentricität der Erdbahn durch die Formel bestimmen:

$$e = 0,01679207 - 0,0000004135 - 0,0000000000123t^2,$$

aus welcher Formel folgt, dass die Excentricität abnimmt und zwar allmählig stärker abnimmt. *jährl.*

Die sechste Tabelle endlich giebt eine Vorstellung von dem Verlauf der Elemente der Erde während eines Zeitraumes von 200 000 Jahren.

Bahnelemente der grossen Planeten.

I.

Planet	Halbe grosse Achse der Bahn	Excen- tricität	Epoche		Mittlere tägliche siderische Bewegung
			mittlerer Mittag (P. Paris; G. Greenwich)	mittlere Länge	
Merkur ☿	0.3870988	0.2056048	1850 1. Januar P.	327° 15' 20".4	14732".41967
Venus ♀	0.7233322	0.0068431	1850 1. Januar P.	245 33 14.7	5767.66982
Erde ♂	1.0000000	0.0167708	1850 1. Januar P.	100 46 43.5	3548.19286
Mars ♂	1.5236914	0.0932611	1850 1. Januar P.	83 40 31.3	1886.51831
Jupiter ♃	5.20280	0.0482520	1850 1. Januar P.	160 1 10.3	299.12836
Saturn ♄	9.53886	0.0560717	1850 1. Januar P.	14 52 28.3	120.45465
Uranus ♅	19.18336	0.0463592	1850 0. Januar G.	29 12 43.7	42.23079
Neptun ♆	30.05674	0.0084962	1850 0. Januar G.	335 5 38.9	21.53302

II.

Planet	Länge des Perihels	Länge des aufsteigenden Knotens	Neigung	Umlaufszeit	
				Siderisch	Tropisch
				t	t
Merkur . . .	75° 7' 13".9	46° 33' 8".8	7° 0' 7".7	87.96926	87.96843
Venus . . .	129 27 14.5	75 19 52.3	3 23 34.8	224.70079	224.69544
Erde . . .	100 21 21.5	. . .	. . .	365.25636	365.24220
Mars . . .	333 17 53.7	48 23 53.1	1 51 2.3	686.97979	686.92972
Jupiter . . .	11 54 58.4	98 56 17.0	1 18 41.4	4332.59	4330.60
Saturn . . .	90 6 56.7	112 20 53.0	2 29 39.8	10759.23	10746.95
Uranus . . .	170 38 48.7	73 14 37.6	0 46 20.9	30688.51	30588.90
Neptun . . .	43 17 30.3	130 7 31.9	1 47 1.6	60186.64	59804.81

III.

Planet	Entfernung von der Sonne		Masse in Theilen der		Verhältniss der Dichte zu jener des Wassers
	in Millionen Kilometer		Sonnen-	Erd-	
	Grösste	Kleinste	Masse		
Merkur . . .	69.37	45.71	$\frac{1}{7636440}$	0.04	4.50
Venus	108.25	106.78	$\frac{1}{412150}$	0.78	4.52
Erde	151.13	146.14	$\frac{1}{322800}$	1.00	5.56
Mars	247.60	205.36	$\frac{1}{3093500}$	0.10	3.98
Jupiter . . .	810.64	736.01	$\frac{1}{1047.6}$	308	1.37
Saturn . . .	1497.32	1338.32	$\frac{1}{3490}$	92	0.65
Uranus . . .	2983.53	2719.16	$\frac{1}{22600}$	14	1.13
Neptun . . .	4505.48	4429.57	$\frac{1}{19380}$	17	1.71
Sonne			1	322800	1.42

IV.

Planet	Jährliche Aenderung der				Grenzen der Excentrici- täten	Grenzen der Neigungen für Ekliptik von 1800
	Excentricität in Einheiten der 7. Deci- male	Länge des		Neigung		
		Perihels	aufsteigen- den Knotens			
Merkur	+ 2.034	+ 55.914	+ 42.643	+ 0.063	0,266	9° 17'
Venus	— 5.397	+ 49.462	+ 32.890	+ 0.045	0,087	5.19
Erde	— 4.244	+ 61.700			0,078	4.52
Mars	+ 9.541	+ 66.242	+ 27.992	— 0.024	0,142	7.9
Jupiter	+ 16.678	+ 57.910	+ 36.382	— 0.205	0,062	2.1
Saturn	— 34.276	+ 70.403	+ 31.407	— 0.140	0,085	2.33
Uranus	+ 27.387	+ 50.256	+ 18.568	+ 0.025	0,065	2.34
Neptun	+ 0.557	+ 51.014	+ 39.615	— 0.346	0,017	2.21

V.

$g_1 = 0'',692870$	$\gamma_1 = 0$
$g_2 = 2,842232$	$\gamma_2 = - 0,756015$
$g_3 = 3,780294$	$\gamma_3 = - 3,106931$
$g_4 = 22,500087$	$\gamma_4 = - 25,952538$
$g_5 = 5,2989$	$\gamma_5 = - 4,795350$
$g_6 = 7,5747$	$\gamma_6 = - 7,067951$
$g_7 = 17,1527$	$\gamma_7 = - 17,468102$
$g_8 = 17,8633$	$\gamma_8 = - 18,567871$

VI.

Elemente der Erde in Bezug auf die Ekliptik des Jahres 1800.

Epoche	Excentri- cität	Länge des Pe- rihels	Neigung der Erd- bahn gegen Ekliip- tik von 1800	Länge des aufstei- genden Knotens
Vor Chr. 98200	0.0473	316° 18'	3° 45' 31''	96° 34'
88200	0.0452	340 2	2 42 19	76 17
78200	0.0398	4 13	1 18 58	73 47
68200	0.0316	27 22	1 13 58	136 8
58200	0.0218	46 8	2 36 42	136 9
48200	0.0131	50 44	3 40 11	116 9
38200	0.0109	28 36	4 3 1	91 59
28200	0.0151	25 50	3 41 51	66 49
18200	0.0188	44 0	2 44 12	41 34
8200	0.0195	69 47	1 24 35	16 39

Epoche	Excentri- cität	Länge des Pe- rihels	Neigung der Erd- bahn gegen Ekli- ptik von 1800	Länge des aufstei- genden Knotens
Nach Chr. 1800	0·0168	99° 30′	0° 0′ 0″	
11800	0·0115	134 14	1 14 26	148 15
21800	0·0047	192 22	2 7 46	124 29
31800	0·0059	318 47	2 33 19	100 29
41800	0·0124	6 25	2 27 53	75 31
51800	0·0173	38 3	1 51 54	48 13
61800	0·0199	64 31	1 51 52	10 47
71800	0·0211	86 14	1 34 35	220 38
81800	0·0188	101 38	1 45 40	170 15
91800	0·0176	109 19	2 40 56	139 3
101800	0·0189	114 5	3 2 57	109 57



THE UNIVERSITY OF CHICAGO
 LIBRARY

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448	449	450	451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510	511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540	541	542	543	544	545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570	571	572	573	574	575	576	577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600	601	602	603	604	605	606	607	608	609	610	611	612	613	614	615	616	617	618	619	620	621	622	623	624	625	626	627	628	629	630	631	632	633	634	635	636	637	638	639	640	641	642	643	644	645	646	647	648	649	650	651	652	653	654	655	656	657	658	659	660	661	662	663	664	665	666	667	668	669	670	671	672	673	674	675	676	677	678	679	680	681	682	683	684	685	686	687	688	689	690	691	692	693	694	695	696	697	698	699	700	701	702	703	704	705	706	707	708	709	710	711	712	713	714	715	716	717	718	719	720	721	722	723	724	725	726	727	728	729	730	731	732	733	734	735	736	737	738	739	740	741	742	743	744	745	746	747	748	749	750	751	752	753	754	755	756	757	758	759	760	761	762	763	764	765	766	767	768	769	770	771	772	773	774	775	776	777	778	779	780	781	782	783	784	785	786	787	788	789	790	791	792	793	794	795	796	797	798	799	800	801	802	803	804	805	806	807	808	809	810	811	812	813	814	815	816	817	818	819	820	821	822	823	824	825	826	827	828	829	830	831	832	833	834	835	836	837	838	839	840	841	842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861	862	863	864	865	866	867	868	869	870	871	872	873	874	875	876	877	878	879	880	881	882	883	884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896	897	898	899	900	901	902	903	904	905	906	907	908	909	910	911	912	913	914	915	916	917	918	919	920	921	922	923	924	925	926	927	928	929	930	931	932	933	934	935	936	937	938	939	940	941	942	943	944	945	946	947	948	949	950	951	952	953	954	955	956	957	958	959	960	961	962	963	964	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974	975	976	977	978	979	980	981	982	983	984	985	986	987	988	989	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000	1001	1002	1003	1004	1005	1006	1007	1008	1009	1010	1011	1012	1013	1014	1015	1016	1017	1018	1019	1020	1021	1022	1023	1024	1025	1026	1027	1028	1029	1030	1031	1032	1033	1034	1035	1036	1037	1038	1039	1040	1041	1042	1043	1044	1045	1046	1047	1048	1049	1050	1051	1052	1053	1054	1055	1056	1057	1058	1059	1060	1061	1062	1063	1064	1065	1066	1067	1068	1069	1070	1071	1072	1073	1074	1075	1076	1077	1078	1079	1080	1081	1082	1083	1084	1085	1086	1087	1088	1089	1090	1091	1092	1093	1094	1095	1096	1097	1098	1099	1100	1101	1102	1103	1104	1105	1106	1107	1108	1109	1110	1111	1112	1113	1114	1115	1116	1117	1118	1119	1120	1121	1122	1123	1124	1125	1126	1127	1128	1129	1130	1131	1132	1133	1134	1135	1136	1137	1138	1139	1140	1141	1142	1143	1144	1145	1146	1147	1148	1149	1150	1151	1152	1153	1154	1155	1156	1157	1158	1159	1160	1161	1162	1163	1164	1165	1166	1167	1168	1169	1170	1171	1172	1173	1174	1175	1176	1177	1178	1179	1180	1181	1182	1183	1184	1185	1186	1187	1188	1189	1190	1191	1192	1193	1194	1195	1196	1197	1198	1199	1200	1201	1202	1203	1204	1205	1206	1207	1208	1209	1210	1211	1212	1213	1214	1215	1216	1217	1218	1219	1220	1221	1222	1223	1224	1225	1226	1227	1228	1229	1230	1231	1232	1233	1234	1235	1236	1237	1238	1239	1240	1241	1242	1243	1244	1245	1246	1247	1248	1249	1250	1251	1252	1253	1254	1255	1256	1257	1258	1259	1260	1261	1262	1263	1264	1265	1266	1267	1268	1269	1270	1271	1272	1273	1274	1275	1276	1277	1278	1279	1280	1281	1282	1283	1284	1285	1286	1287	1288	1289	1290	1291	1292	1293	1294	1295	1296	1297	1298	1299	1300	1301	1302	1303	1304	1305	1306	1307	1308	1309	1310	1311	1312	1313	1314	1315	1316	1317	1318	1319	1320	1321	1322	1323	1324	1325	1326	1327	1328	1329	1330	1331	1332	1333	1334	1335	1336	1337	1338	1339	1340	1341	1342	1343	1344	1345	1346	1347	1348	1349	1350	1351	1352	1353	1354	1355	1356	1357	1358	1359	1360	1361	1362	1363	1364	1365	1366	1367	1368	1369	1370	1371	1372	1373	1374	1375	1376	1377	1378	1379	1380	1381	1382	1383	1384	1385	1386	1387	1388	1389	1390	1391	1392	1393	1394	1395	1396	1397	1398	1399	1400	1401	1402	1403	1404	1405	1406	1407	1408	1409	1410	1411	1412	1413	1414	1415	1416	1417	1418	1419	1420	1421	1422	1423	1424	1425	1426	1427	1428	1429	1430	1431	1432	1433	1434	1435	1436	1437	1438	1439	1440	1441	1442	1443	1444	1445	1446	1447	1448	1449	1450	1451	1452	1453	1454	1455	1456	1457	1458	1459	1460	1461	1462	1463	1464	1465	1466	1467	1468	1469	1470	1471	1472	1473	1474	1475	1476	1477	1478	1479	1480	1481	1482	1483	1484	1485	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	---

Verlag von JOH. AMBR. BARTH in LEIPZIG.

Elemente
der
QUATERNIONEN

von
William Rowan Hamilton.

Deutsch
von
Dr. Paul Glan,
Docent für Physik an der Universität Berlin.

Zwei Bände.

1882—84. M. 34. —

- I. Band: XXIV, 746 Seiten gr. 8°. (Theorie der Q.) M. 20. —
II. „ LXXIII, 436 Seiten gr. 8°. (Anwendungen.) M. 14. —

Das vorstehend angekündigte Werk ist bekanntlich nicht nur das grundlegende, sondern auch das ausführlichste, sowie das am leichtesten verständliche Werk über diesen wichtigen Zweig der höheren Mathematik. — Nicht nur in England sondern auch in Deutschland ist das Rechnen mit Quaternionen in steter Zunahme begriffen, indem man die zahlreichen Vortheile eingesehen hat, welche damit für die Praxis, d. h. für die Anwendung der Mathematik in der Physik, der Astronomie, der Mechanik u. s. w. verbunden sind.

Der Verfasser hat sich ganz besonders bemüht, durch ausführliche Erklärungen der Grundbegriffe jedes Missverständniss auszuschliessen und der Uebersetzer hat in der gleichen Absicht noch eine sehr nützliche Anweisung beigegeben, auf welche Weise das Werk am zweckmässigsten zu studiren sei.

Der I. Band enthält die vollständige Lehre von den Q. mit zahlreichen erläuternden Beispielen, und kann gewissermassen als abgeschlossenes Lehr-

buch der Q. betrachtet werden. Im II. Band ist eine systematische Bearbeitung der Geometrie mittelst der Q.-Rechnung gegeben, ferner die Anwendung auf einige Abschnitte der Physik und Mechanik gezeigt.

Nicht zu verwechseln ist das Werk mit desselben Verfassers früher erschienenen noch umfangreicheren „Lectures on Q.“, welche als das noch ungeordnete Material zu der in den „Elementen d. Q.“ gegebenen systematischen Darstellung betrachtet werden können.

Die Arithmetik der Lage.

Ein neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Raumlehre

von

Dr. H. Noth.

90 Seiten gr. 8^o. m. Fig. 1881. M. 2.40.

Durch die „Arithmetik der Lage“ wird eine Idee vollständig realisiert, die zuerst von Leibniz (im Jahre 1679) ausgesprochen und in neuester Zeit von dem genialen Mathematiker H. Grassmann weiter verfolgt wurde, die Idee einer Arithmetik, durch welche die Lage der Raumelemente direkt ausgedrückt wird, ohne dass hierzu Grössenverhältnisse benutzt werden. Mit Hilfe von Berechnungen, deren Gesetze mit denen der gewöhnlichen Arithmetik (der Addition, Subtraction, Multiplication und Division) übereinstimmen, wird hier z. B. die Lage von Punkten und unbegrenzten geraden Linien berechnet. Hierbei stellen sich (unter anderen) besonders merkwürdige und einfache Beziehungen zwischen den Punkten von Curven und ihren Tangenten heraus. Besonders beachtenswerth erscheint ferner der Umstand, dass durch die „Arithmetik der Lage“ die Zahlentheorie mit der Raumlehre von einer völlig neuen Seite aus in Föhlung gebracht wird.

Verlag von JOH. AMBR. BARTH in LEIPZIG.

Beiträge zur Interpretation
der
partiellen Differentialgleichungen,
mit drei Variabeln

von

Paul Du Bois-Reymond.

Erstes [einziges] Heft: Die Theorie der Charakteristiken.

gr. 8°. XVIII, 255 S. 1864. M. 5. 20.

Das mathematische Raumproblem
und die
geometrischen Axiome

von

Alfr. Donath.

8°. 68 Seiten. 1881. M. 1. 60.

Die Potentialfunction und das Potential.

Ein Beitrag zur mathematischen Physik

von

R. Clausius.

4. vermehrte Auflage. 178 Seiten gr. 8°. 1885. M. 4. —

Nähere Angaben über Inhalt und Ausführung dieses in der wissenschaftlichen Welt allbekannten Werkes sind wohl entbehrlich. Es sei nur bemerkt, dass diese 4. Auflage sich der wesentlich erweiterten dritten anschliesst, zu welcher sie jedoch einige Zusätze und Verbesserungen bringt.

Verlag von JOH. AMBR. BARTH in LEIPZIG.

Physikalische Einheiten und Constanten

von

J. D. Everett,

Professor der Mathematik in Belfort.

Nach der dritten englischen Ausgabe unter Zustimmung des Verfassers
den deutschen Verhältnissen angepasst durch

Dr. P. Chappuis und **Dr. D. Kreichgauer**

vom Bureau international des poids et mesures à Breteuil.

126 Seiten. 1888. M. 3. —

Von diesem vor wenigen Jahren auf Veranlassung eines Comités zur Wahl und Benennung der mechanischen und elektrischen Einheiten geschriebenen Buch ist bereits die 3. englische Auflage erschienen, ferner eine französische, eine holländische, eine italienische und eine polnische Uebersetzung — gewiss ein Beweis besonderer Wichtigkeit.

Die vorliegende deutsche Ausgabe enthält sowohl dem Original als auch den anderen Ausgaben gegenüber den wesentlichen Vorzug, dass die Herausgeber auch die wichtigsten Ergebnisse der Untersuchungen ausserenglischer Gelehrten berücksichtigten, sowie dass sie sich anstatt der englischen der metrischen Maasse bedienten. Die als vorzüglich anerkannten Beispiele in der Original-Ausgabe sind dagegen nicht wesentlich verändert worden.

Von wie grossem praktischen Werth eine solche Zusammenstellung sowohl für wissenschaftliche Arbeiten als auch für die Technik ist, braucht nicht erst bewiesen zu werden; die Anzeige seines Erscheinens wird genügen, um ihm sowohl unter Gelehrten als Studirenden und Technikern allgemeine Verbreitung zu verschaffen.

G. W. Lohrmann's Mondkarte

25 Blatt in Kupferstich

nebst 2 Erläuterungstafeln, 53 Seiten Text (Ortsbestimmungen) und Lohrmann's Portrait, gestochen von Sichling.

gr. 4°. In Mappe M. 50. —

Zwischen dem Beginn und der Vollendung von Lohrmann's grosser Mondkarte liegen 50 Jahre; zum grösseren Theil ist der Stich erst nach dem Tode L.'s, jedoch genau nach dessen hinterlassenen Zeichnungen ausgeführt worden. — Innerhalb dieser Zeit erschien auch Mädler's mappa selenogr. und eine Vergleichung beider Arbeiten findet sich in der Zeitschrift Sirius, 1878. 4. Heft. Nach derselben stimmen die beiden ganz unabhängig von einander entstandenen Karten mit wunderbarer Genauigkeit überein, wenn auch jede ihre eigenen Vorzüge und Nachtheile hat, welche theilweise in der technischen Ausführung liegen.

Die mit der Zeit zunehmende Wichtigkeit guter Mondkarten leuchtet ein, wenn man in Betracht zieht, dass schon jetzt einzelne Abweichungen zwischen den neuesten Beobachtungen und den Zeichnungen Lohrmann's und Mädler's constatirt wurden, welche keinesfalls auf Unrichtigkeiten der Karten beruhen können, mithin eine Veränderung der Mondoberfläche beweisen.

Der Kupferstich Lohrmann's hat namentlich den Vorzug der grösseren Bestimmtheit, wie er bei der Darstellung der verwickelten Gebirgszüge von hohem Nutzen ist.

*** Um die Benutzung der Lohrmann'schen Karte sowohl als zusammengesetztes Mondbild (Durchmesser 1 Meter) als auch in einzelnen handlichen Blättern bei Beobachtungen am Fernrohr zu erleichtern, gebe ich von jetzt an jedes der 25 Blatt auch **einzel**n zu **M. 1.** — ab. Text, Erläuterungstafeln und Portrait können jedoch nicht einzeln geliefert werden. ***

Verlag von JOH. AMBR. BARTH in LEIPZIG.

Das Licht.

Zwölf Vorlesungen

gehalten in Aberdeen, 1883—85, nebst zwei Vorlesungen über
Absorption und Fluorescenz des Lichtes

von

G. G. Stokes,

M. A. F. R. S. etc. Prof. d. Math. in Cambridge.

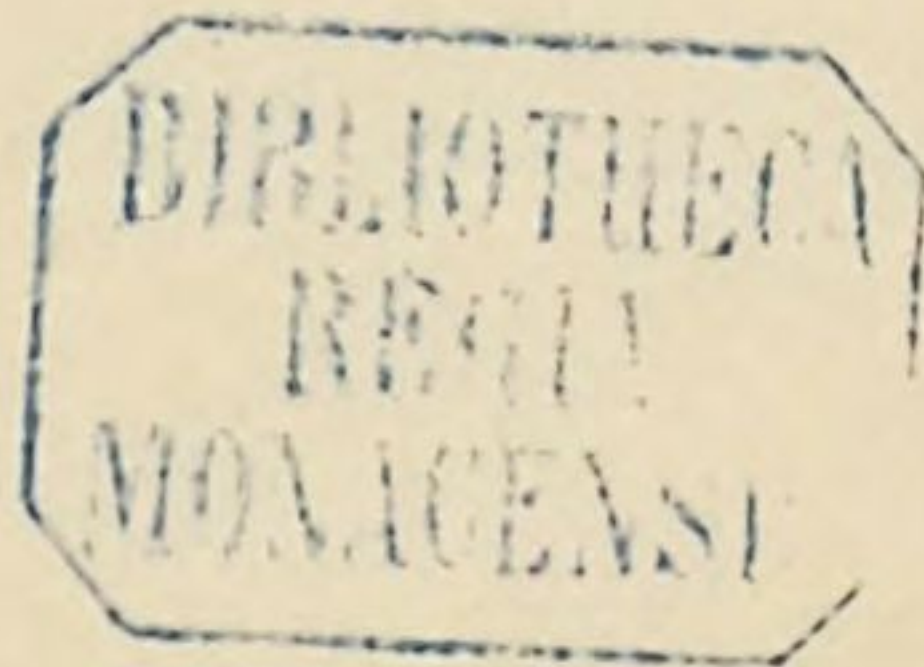
Uebersetzt von Dr. O. Dziobek.

XII, 308 Seiten gr. 8°. mit Portrait d. Verfassers in Stahlstich.
geheftet M. 5. —, in ff. Halbfranz M. 7. —

Wenn ein so hervorragender Gelehrter wie Stokes, dessen wissenschaftliche Arbeiten beinahe ein halbes Jahrhundert umfassen, dessen zum Theil grundlegende Entdeckungen uns in jedem Lehrbuch der Physik begegnen, für einen weiteren Kreis bestimmte Vorlesungen hält und veröffentlicht, so erwirbt er sich ein hohes Verdienst um die Förderung seiner Wissenschaft.

In vollem Maasse gilt dies von den hiermit dem deutschen Publikum zugänglich gemachten Vorlesungen über das Licht. In denselben sind die Gründe für die Richtigkeit der Wellentheorie an der Hand der Erscheinungen, ferner die Anwendungen des Lichts als Forschungsmittel und seine wohlthätigen Wirkungen in einer Weise dargestellt, wie es nur derjenige vermag, der seine Wissenschaft in allen ihren Theilen bis zur vollendeten Klarheit durchdacht hat.

Es dürfte wenig Bücher geben, in welchen eine so fest auf mathematischem Grund ruhende Lehre wie die Wellentheorie des Lichts fast ohne alle mathemat. Ausdrücke bis in ihre tiefsten Probleme hinein in allgemein verständlicher Sprache erläutert wäre; in dieser Beziehung können Stokes' Vorlesungen als ein Muster der Darstellungsweise bezeichnet werden.



LEIPZIG.

DRUCK VON GRIMME & TRÖMEL.



Dziobek, Otto

Die mathematischen Theorien der Planetenbewegungen

Leipzig 1888

Astr.p. 43 m

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11554850-9